Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

Analysis für Informatiker

10. Präsenzübungsblatt - Lösungen

Präsenzaufgabe 10.1 Zeigen Sie mit Hilfe der Ableitungsregeln, dass die folgenden Funktionen differenzierbar sind und berechnen Sie deren Ableitung.

1. $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
2. $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (3x^3 + 2x^2 + x + 1)\cosh(e^x)e^{(x^2)}$
4. $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(\frac{1}{x^2})}{x^4+x^2+1}$.

Lösung: Bemerkung: Ist $c \in \mathbb{C}$ und $h : U \to \mathbb{C}$ differenzierbar in U ($U \subseteq \mathbb{R}$ offen), dann ist auch ch differenzierbar in U mit Ableitung ch' (Produktregel).

1. und 2.: $x \mapsto e^x$ und $x \mapsto -x$ sind differenzierbar auf $\mathbb{R}$, mit Ableitungen $x \mapsto e^x$ (siehe VL) und $x \mapsto -1$ (Bemerkung + Bsp. VL). Nach der Kettenregel ist auch $x \mapsto e^{-x}$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit Ableitung $x \mapsto -e^{-x}$. Damit sind sinh und cosh als Summen differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Für die Ableitung ergibt sich

$$\sinh(x)' = \frac{e^x - e^{-x}(-1)}{2} = \cosh(x)$$

und

$$\cosh(x)' = \frac{e^x + e^{-x}(-1)}{2} = \sinh(x)$$

(Das beweist auch, dass sinh und cosh unendlich oft differenzierbar sind).

3. Polynomfunktionen sind nach der Bemerkung, als Summen von differenzierbaren Funktionen differenzierbar in $\mathbb{R}$. Nach 2. und der Kettenregel ist auch $\cosh(e^x)$ differenzierbar und ebenfalls nach der Kettenregel it $e^{(x^2)}$ differenzierbar. Nach der Produktregel ist f differenzierbar mit Ableitung

$$\begin{aligned} f'(x) &= (9x^2 + 4x + 1)\cosh(e^x)e^{(x^2)} + (3x^3 + 2x^2 + x + 1)(\sinh(e^x)e^x e^{(x^2)} + \cosh(e^x)e^{(x^2)}2x) \\ &= (6x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 6x + 1)\cosh(e^x)e^{(x^2)} + (3x^3 + 2x^2 + x + 1)\sinh(e^x)e^{x(x+1)}. \end{aligned}$$

4. f ist differzierbar auf $\mathbb{R}$ nach 3. und $1/x^2$ ist differenzierbar in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, da $1/x$ differenzierbar außerhalb der Null ist und nach der Kettenregel. Zusätzlich ist $x^4 + x^2 + 1$ differenzierbar in $\mathbb{R}$ und nimmt auf $\mathbb{R}$ nicht den Wert Null an. Demnach ist g nach der Quotientenregel differenzierbar in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit Ableitung

$$g'(x) = \frac{f'(1/x^2)(-2)\frac{1}{x^3}(x^4 + x^2 + 1) - f(1/x^2)(4x^3 + 2x)}{(x^4 + x^2 + 1)^2}.$$

Präsenzaufgabe 10.2 Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

differenzierbar ist. Zeigen Sie anschließend, dass die Ableitung f' nicht stetig ist.

Beweis: Nach HA Blatt 11. ist sin differenzierbar in $\mathbb{R}$ mit $\sin' = \cos$. Nach den Ableitungsregeln ist f differenzierbar in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit Ableitung

$$f'(x) = 2x\sin(1/x) + x^2\cos(1/x)(-1)\frac{1}{x^2} = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x) \qquad (x \neq 0).$$

Für $x \neq 0$ ergibt sich

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2\sin(1/x) - 0}{x} = x\sin(1/x) \to 0$$

für $x \to 0$, da $|\sin(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Demnach ist f differenzierbar in $x = 0$ mit $f'(0) = 0$, also ist f differenzierbar in $\mathbb{R}$ mit Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin(1/x) - \cos(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Die Funktion f' ist aber nicht stetig in $x = 0$, da für die Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{n\pi}$ für $n \in \mathbb{N}$ die Bildfolge

$$f'(x_n) = 2\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi) - \cos(n\pi) = 2\frac{1}{n\pi}0 - \cos(n\pi) = (-1)^{n+1}$$

divergent ist und somit nicht gegen $f(0)$ konvergiert.

Präsenzaufgabe 10.3 Zeigen Sie, dass die Wurzelfunktion

$$\sqrt{\ } : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$$

differenzierbar ist, mit Ableitung

$$(\sqrt{\ })' : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ist f' erneut differenzierbar? Berechnen Sie anschließend noch die Ableitung der Funktion $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sqrt{\cosh(1/x)}}{(x^2+1)}$.

Beweis: Sei $x_0, x \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $x \neq x_0$. Dann gilt

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \to \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

für $x \to x_0$, da die Wurzelfunktion stetig in $\mathbb{R}_{>0}$ und $1/x$ stetig in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist.

Nach der Kettenregel ist auch $f' : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung $f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{x^3}$.

Die Funktion in g ist differenzierbar nach den Ableitungsregeln mit Ableitung

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\cosh(1/x)}}\sinh(1/x)(-1)\frac{1}{x^2}(x^2+1) - \sqrt{\cosh(1/x)}2x}{x^4 + 2x^2 + 1}.$$

Präsenzaufgabe 10.4 Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

unendlich oft differenzierbar in $\mathbb{R}$ ist mit $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

(Hierbei bezeichnet $f^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ die n-te Ableitung von f, also $f^{(0)} := f$ und $f^{(n+1)} := (f^{(n)})'$ für $n \in \mathbb{N}_0$).

Beweis:

Wir zeigen per Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$, dass f n-mal differenzierbar ist mit

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

wobei p_n eine reellwertige Polynomfunktion ist.
Für $n = 0$ ist die Aussage trivialerweise mit $p_0(x) = 1$ wahr. Sei die Behauptung nun für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gezeigt. Dann ist $f^{(n)}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ per Induktionsvoraussetzung gegeben durch $p_n((1/x))e^{-\frac{1}{x^2}}$, wobei $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Polynomfunktion ist. Nach der Produkt - und Kettenregel ist $f^{(n)}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar mit Ableitung

$$\begin{aligned} f^{n+1}(x) &= \left(p_n \circ \frac{1}{x}\right)' e^{-\frac{1}{x^2}} + p_n(1/x)e^{-\frac{1}{x^2}} 2\frac{1}{x^3} \\ &= p_n'(1/x)(-1)\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}} + p_n(1/x)e^{-\frac{1}{x^2}} 2\frac{1}{x^3} \\ &= \left(2p_n(1/x)\frac{1}{x^3} - p_n'(1/x)\frac{1}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= p_{n+1}(1/x)e^{-\frac{1}{x^2}}, \end{aligned}$$

wobei p_{n+1} die reellwertige Polynomfunktion bezeichnet, welche gegeben ist durch

$$p_{n+1}(x) = 2p_n x^3 - p_n' x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Wir zeigen nun noch, dass $f^{(n)}$ auch differenzierbar in $x = 0$ ist mit $f^{(n+1)}(0) = 0$. Per Induktionsvoraussetzung gilt

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

mit einem Polynom von Grad $\leq m \in \mathbb{N}_0$. Da $e^{-x} < k!\frac{1}{x^k}$ für alle $x > 0$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt für alle $x \neq 0$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{m+1}{2}$

$$\begin{aligned} \left|\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0}\right| &= \left|\frac{1}{x}p_n(1/x)\right| \left|e^{-\frac{1}{x^2}}\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{x}p_n(1/x)\right| N!|x|^{2N} \\ &= N!|p_n(1/x)||x|^{2N-1} \to 0 \end{aligned}$$

für $x \to 0$, da $N > \frac{m+1}{2} \iff 2N - 1 > m \geq \deg(p_n)$. Damit folgt die Induktionsbehauptung.
