Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel Wintersemester 23/24

Analysis für Informatiker

11. Hausaufgabenblatt - Lösungen

Hausaufgabe 11.1 Zeigen Sie mit Hilfe der Ableitungsregeln, dass die folgenden Funktionen differenzierbar sind und berechnen Sie deren Ableitung.

(Hinweis: Die Differenzierbarkeit der Wurzelfunktion $\sqrt{\ } : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit Ableitung $\sqrt{\ }' : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ darf verwendet werden (siehe Präsenzaufgabe 10.3))

1. $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$
2. $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$
3. $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto (x^4 - x^3 + 1)\sin(x)e^{\sqrt{x}}$
4. $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x)}{x^4+x^2+1}$.
5. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2+x^2+\sin(x)^2}}$

Lösung:

1. und 2.: Die Funktionen $[x \mapsto e^{ix}]$ und $[x \mapsto e^{-ix}]$ sind laut Vorlesung differenzierbar in $\mathbb{R}$ mit Ableitung $[x \mapsto ie^{ix}]$ und $[x \mapsto -ie^{-ix}]$. Demnach sind auch sin und cos als Summen von differenzierbaren Funktionen differenzierbar. Für die Ableitung ergibt sich

$$\sin'(x) = \frac{ie^{ix} - (-i)e^{-ix}}{2i} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$\cos'(x) = \frac{ie^{ix} + (-i)e^{-ix}}{2} = i\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = -\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -\sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit sind sin und cos unendlich oft differenzierbar.

3. $\sqrt{x}$ ist diffbar in $\mathbb{R}_{>0}$ nach PA 10.3. Da exp diffbar in $\mathbb{R}$ ist, ist $e^{\sqrt{x}}$ ebenfalls diffbar in $\mathbb{R}_{>0}$ nach der Kettenregel. sin ist diffbar in $\mathbb{R}$ nach 1., also auch in $\mathbb{R}_{>0}$. Polynomfunktionen sind ebenfalls diffbar in $\mathbb{R}$, also auch in $\mathbb{R}_{>0}$. Nach der Produktregel ist also f diffbar. Die Ableitung ist

$$f'(x) = (4x^3 - 3x^2)\sin(x)e^{\sqrt{x}} + (x^4 - x^3 + 1)\left(\cos(x)e^{\sqrt{x}} + \sin(x)e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\right).$$

4. f ist diffbar in $\mathbb{R}_{>0}$ nach 3.. $[x \mapsto x^4 + x^2 + 1]$ ist diffbar in $\mathbb{R}$, also auch in $\mathbb{R}_{>0}$ und nimmt auf $\mathbb{R}$ niemals den Wert Null an. Nach der Quotientenregel ist $\frac{f(x)}{x^4+x^2+1}$ diffbar mit Ableitung

$$\left(\frac{f(x)}{x^4 + x^2 + 1}\right)' = \frac{f'(x)(x^4 + x^2 + 1) - f(x)(4x^3 + 2x)}{(x^4 + x^2 + 1)^2}.$$

5. Nach 1. und den Ableitungsregeln ist $[x \mapsto 2 + x^2 + \sin(x)^2]$ diffbar in $\mathbb{R}$ und nimmt nur Werte in $[2, \infty)$ an. Nach der Kettenregel ist $[x \mapsto \sqrt{2 + x^2 + \sin(x)^2}$

diffbar in $\mathbb{R}$. Zusätzlich gilt $\sqrt{2+x^2+\sin(x)^2} \geq \sqrt{2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach der Quotientenregel ist $[x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2+x^2+\sin(x)^2}}$ diffbar mit Ableitung

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\sqrt{2+x^2+\sin(x)^2}}\right)' &= -\frac{\sqrt{2+x^2+\sin(x)^2}'}{\sqrt{2+x^2+\sin(x)^2}^2} \\ &= -\frac{\frac{1}{2\sqrt{2+x^2+\sin(x)^2}}(2x+2\sin(x)\cos(x))}{2+x^2+\sin(x)^2} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{2x+2\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{(2+x^2+\sin(x)^2)^3}}.\end{aligned}$$

Hausaufgabe 11.2 Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x|x|$$

differenzierbar ist. Zeigen Sie anschließend, dass die Ableitung f' stetig, aber nicht differenzierbar ist.

Beweis: $f(x) = x^2$ für alle $x > 0$ und $f(x) = -x^2$ für alle $x < 0$. Also ist f differenzierbar auf der offenen Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $f'(x) = 2x$ für $x > 0$ und $f'(x) = -2x$ für $x < 0$. Sei nun $x \neq 0$. Dann gilt

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x|x|}{x} = |x| \to 0$$

für $x \to 0$. Damit ist f auch in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$. Demnach ist f differenzierbar in $\mathbb{R}$ mit Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ -2x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} = 2|x|.$$

Die Funktion $x \mapsto 2|x|$ iststetig aber nicht differenzierbar in $x = 0$, da sonst auch die Funktion $x \mapsto |x|$ differenzierbar in $x = 0$ wäre. In der Vorlesung wurde jedoch gezeigt, dass die Betragsfunktion nicht differenzierbar in $x = 0$ ist.

Hausaufgabe 11.3 In der Vorlesung wird gezeigt werden, dass $\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist.
Berechnen Sie, indem Sie verwenden, dass log differenzierbar ist, die Ableitung $\log' : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$. (Hinweis: Da log die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist, gilt $e^{\log(x)} = x$ für alle $x > 0$. Differenzieren Sie nun beide Seiten dieser Identität mit Hilfe der Kettenregel)

Beweis:

Nach der Kettenregel gilt

$$(\exp \circ \log)'(x) = \exp'(\log(x)) \log'(x) = \exp(\log(x)) \log'(x) = x \log'(x)$$

für alle $x > 0$.

Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ hat Ableitung $x \mapsto 1$. Somit ergibt sich für alle $x > 0$

$$x \log'(x) = (\exp \circ \log)'(x) = x' = 1$$

was äquivalent zu

$$\log'(x) = \frac{1}{x}$$

für alle $x > 0$ ist.

Hausaufgabe 11.4 Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

unendlich oft differenzierbar ist mit $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(Hierbei bezeichnet $f^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ die n-te Ableitung von f, also $f^{(0)} := f$ und $f^{(n+1)} := (f^{(n)})'$ für $n \in \mathbb{N}_0$).

Beweis:

Wir zeigen per Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$, dass f n-mal differenzierbar ist mit

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases},$$

wobei p_n eine reellwertige Polynomfunktion ist.
Für $n = 0$ ist die Aussage trivialerweise mit $p_0(x) = 1$ wahr. Sei die Behauptung nun für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gezeigt. Dann ist $f^{(n)}$ auf $(0, \infty)$ per Induktionsvoraussetzung gegeben durch $p_n((1/x))e^{-\frac{1}{x^2}}$, wobei $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Polynomfunktion ist. Nach der Produkt - und Kettenregel ist $f^{(n)}$ auf $(0, \infty)$ differenzierbar mit Ableitung

$$\begin{aligned} f^{n+1}(x) &= \left(p_n \circ \frac{1}{x}\right)' e^{-\frac{1}{x^2}} + p_n(1/x)e^{-\frac{1}{x^2}} 2\frac{1}{x^3} \\ &= p_n'(1/x)(-1)\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}} + p_n(1/x)e^{-\frac{1}{x^2}} 2\frac{1}{x^3} \\ &= \left(2p_n(1/x)\frac{1}{x^3} - p_n'(1/x)\frac{1}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= p_{n+1}(1/x)e^{-\frac{1}{x^2}}, \end{aligned}$$

wobei p_{n+1} die reellwertige Polynomfunktion bezeichnet, welche gegeben ist durch

$$p_{n+1}(x) = 2p_n x^3 - p_n' x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Auf $(-\infty, 0)$ ist $f^{(n)}$ per Induktionsvoraussetzung konstant Null, also differenzierbar mit $f^{(n+1)}(x) = 0$ für $x < 0$.

Wir zeigen nun noch, dass $f^{(n)}$ auch differenzierbar in $x = 0$ ist mit $f^{(n+1)}(0) = 0$. Per Induktionsvoraussetzung gilt

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

mit einem Polynom von Grad $\leq m \in \mathbb{N}_0$. Da $e^{-x} < k!\frac{1}{x^k}$ für alle $x > 0$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt für alle $x > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{m+1}{2}$

$$\begin{aligned}\left|\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0}\right| &= \left|\frac{1}{x}p_n(1/x)\right| \left|e^{-\frac{1}{x^2}}\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{x}p_n(1/x)\right| N!|x|^{2N} \\ &= N!|p_n(1/x)||x|^{2N-1} \to 0\end{aligned}$$

für $x \downarrow 0$, da $N > \frac{m+1}{2} \iff 2N - 1 > m \geq \deg(p_n)$. Damit folgt

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = 0.$$

Offensichtlich gilt

$$\lim_{x \uparrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{0 - 0}{x - 0} = 0.$$

und somit

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = 0 = \lim_{x \uparrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0},$$

was wiederum äquivalent zu

$$\lim_{x \to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = 0$$

ist. Damit ist $f^{(n)}$ in 0 differenzierbar. Insgesamt ist $f^{(n)}$ in $\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung

$$f^{(n+1)}(x) = \begin{cases} p_{n+1}(1/x)e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}.$$

Damit ist f unendlich oft differenzierbar ist mit $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Abgabe der Hausaufgaben bis zum Samstag den 14.01.2024, 23.59 Uhr in Panda.