Universität Paderborn Wintersemester 23/24
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Analysis für Informatiker

11. Präsenzübungsblatt - Lösungen

Präsenzaufgabe 11.1 Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen differenzierbar sind und berechnen Sie deren Ableitung.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \log(\sqrt{x^4 + 2x^2 + 4})$
2. $g : \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sinh(\log(3x^2))}{\sin(x)}$.

Lösung:

$x^4 + 2x^2 + 4$ is differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und hat Bild in $\mathbb{R}_{>0}$. $\sqrt{\ }$ ist differenzierbar in $\mathbb{R}_{>0}$ und hat Bild in $\mathbb{R}_{>0}$. log ist ebenfalls differenzierbar auf $\mathbb{R}_{>0}$, also ist f nach der Kettenregel differenzierbar. Für die Ableitung ergibt sich

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 4}} \frac{1}{2\sqrt{x^4 + 2x^2 + 4}}(4x^3 + 4x) = \frac{2x(x^2 + 1)}{x^4 + 2x^2 + 4}.$$

sin ist differenzierbar in $\mathbb{R}$ und $\neq 0$ in $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. log ist differenzierbar in $\mathbb{R}_{>0}$, sinh, und $3x^2$ sind ebenfalls differenzierbar in $\mathbb{R}$, also ist g nach der Quotientenregel differenzierbar mit Ableitung:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\cosh(\log(3x^2))\frac{1}{3x^2}6x\sin(x) - \sinh(\log(3x^2))\cos(x)}{\sin^2(x)} \\ &= \frac{\cosh(\log(3x^2))\frac{2\sin(x)}{x} - \sinh(\log(3x^2))\cos(x)}{\sin^2(x)}. \end{aligned}$$

Präsenzaufgabe 11.2 Der Konvergenzradius r der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

ist bekanntlich gleich 1. Sei $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} x^k$. Begründen Sie, dass f unendlich oft differenzierbar ist und zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{j} (k + i)x^k = f^{(j)}(x) = \frac{j!}{(1 - x)^{j+1}}$$

für alle $x \in (-1, 1)$ gilt.

Beweis:

Eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in \mathbb{R}_{>0}$ ist laut Vorlesung innerhalb des Konvergenradius unendlich oft differenzierbar als Funktion in $(-R, R)$ und die Ableitungen ergeben sich durch gliedweises differenzieren der Potenzreihe. Die abgeleiteten Potenzreihen haben dann automatisch alle denselben Konvergenzradius R.

Die Identität beweisen wir per Induktion über $j \in \mathbb{N}_0$. Für $j = 0$ ist das die Formel für die geometrische Reihe. Sei die Identität nun für ein $j \in \mathbb{N}_0$ bewiesen. Dann gilt in $(-1, 1)$ per Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned}
f^{(j+1)} &= (f^{(j)})' \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{j} (k+i) x^k \right)' \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{j} (k+i) x^k \right)' \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{j} (k+i) k x^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{j} (k+i) x^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{j} (k+1+i) x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{j+1} (k+i) x^k
\end{aligned}$$

Ebenfalls per Induktionsannahme gilt

$$\begin{aligned}
f^{(j+1)} &= (f^{(j)})' \\
&= \left(\frac{j!}{(1-x)^{j+1}} \right)' \\
&= j!(-1)(j+1) \frac{1}{(1-x)^{j+2}} (-1) \\
&= \frac{(j+1)!}{(1-x)^{(j+1)+1}}
\end{aligned}$$

in $(-1, 1)$. Damit folgt die Behauptung für alle $j \in \mathbb{N}_0$.

Präsenzaufgabe 11.3 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = e^x + x^{117} + x^7 + x^{23} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(a) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist und dass die Umkehrfunktion differenzierbar ist.

Hinweis: Untersuchen Sie f auf Monotonie und bestimmen Sie das Grenzverhalten $x \to \pm\infty$.

(b) Berechnen Sie $(f^{-1})'(1)$.

Beweis:

Es gilt $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x + \lim_{x\to-\infty} x^{117} + x^7 + x^{23} = 0 + (-1)\infty = -\infty$ da 117 ungerade ist und nach HA 10.2.1. f ist als Summe der Exponentialfunktion und einer Polynomfunktion differenzierbar, also auch stetig und somit folgt aufgrund des asymptotischen Verhaltens und dem Zwischenwertzsatz, dass f surjektiv ist. Die Ableitung von f ist gegeben durch

$$f'(x) = e^x + 117x^{116} + 7x^6 + 23x^{22}$$

und somit $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dementsprechend ist f nach dem Mittelwertsatz streng monoton steigend und somit auch injektiv, also bijektiv. Nach dem Satz der Umkehrfunktion ist f^{-1} ebenfalls differenzierbar mit Ableitung

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

für alle $y \in \mathbb{R}$. Für $y = 1$ ergibt sich $f^{-1}(1) = 0$, da $f(0) = e^0 = 1$ und somit

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{e^0 + 117\,0^{116} + 7\,0^6 + 23\,0^{22}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Präsenzaufgabe 11.4 Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie: Besitzt f $n \in \mathbb{N}$ Nullstellen mit $n \geq 2$, so besitzt f' mindestens $n - 1$ Nullstellen.

(Hinweis: Mittelwertsatz)

Beweis:

Seien $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$ die n ($n \in \mathbb{N}_{>1}$) Nullstellen von f. Dann existiert nach dem Mittelwertsatz zu jedem $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ein $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ mit

$$f'(\xi_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{0 - 0}{x_{i+1} - x_i} = 0.$$

Damit ist ξ_i für jedes $i \in \{1, \dots, n-1\}$ eine Nullstelle von f' und die Behauptung ist bewiesen.

Präsenzaufgabe 11.5 Untersuchen Sie die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 e^{-x},$$

$$g : [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x}^3 + 1}$$

und

$$h : (0, \sqrt[3]{4}) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x}^3 + 1}$$

auf lokale und globale Minima und Maxima.

Lösung: 1. f ist beliebig oft differenzierbar mit $f'(x) = x(2-x)e^{-x}$ und $f^{(2)}(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$. Als potenzielle Extremstellen ergeben sich demnach $x = 0$ und $x = 2$. Es gilt $f^{(2)}(0) = 2e^{-0} = 2 > 0$ und $f^{(2)}(2) = -2e^{-2} < 0$. Also ist $x = 0$ ein lokales Minimum und $x = 2$ ein lokales Maximum. Da $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ gibt es kein globales Maximum und demnach ist $x = 2$ ein echtes lokales Maximum. $x = 0$ ist ein globales Minimum, da $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(x) = 0 \iff x = 0$.

2. g hat ein globales Minimum bei $x = 0$, da $g(0) = 0$ und $g(0) > 0$ für alle $x > 0$.

g ist beliebig oft differenzierbar in $(0, \infty)$ mit

$$g'(x) = \frac{1 - \frac{1}{2}\sqrt{x^3}}{(\sqrt{x^3} + 1)^2}$$

womit als Extremstellen in $(0, \infty)$ nur der Wert $x_0 = \sqrt[3]{4}$ möglich ist. Die Quotientenregel liefert

$$f^{(2)}(x_0) = \frac{-\frac{3}{4}\sqrt{x_0}3^2 - 0}{3^4} = \frac{-\frac{3}{4}\sqrt{x_0}}{9} < 0$$

also ist $x = \sqrt[3]{4}$ lokales Maximum. Da $f' > 0$ in $(0, \sqrt[3]{4})$ und $f' < 0$ in $(\sqrt[3]{4}, \infty)$ ist f strikt monoton wachsend in $[0, \sqrt[3]{4}]$ und strikt monoton fallend in $[\sqrt[3]{4}, \infty)$. Damit handelt es sich bei x_0 um ein globales Maximum.

3. aus den Ergebnissen von g ergibt sich, dass h keine Extremstellen besitzt.
