Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

Analysis für Informatiker

12. Hausaufgabenblatt - Lösungen

Hausaufgabe 12.1 Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen differenzierbar sind und berechnen Sie deren Ableitung.

1. $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^x$
2. $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{\sqrt{x}}$
3. $h : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \log(\sin(x^{\sqrt{x}} + x^x)^4 + 1)$

Lösung:

1. Für $x > 0$ gilt $x^x = e^{x\log(x)}$. Da $[x\log(x)]$ bzw. exp differenzierbar in $\mathbb{R}_{>0}$ bzw. in $\mathbb{R}$ sind ist es die Verkettung nach der Kettenregel ebenfalls. Die Ableitung ist

$$(x^x)' = (e^{x\log(x)})' = e^{x\log(x)}(\log(x) + x\frac{1}{x}) = e^{x\log(x)}(\log(x)+1) = x^x(\log(x)+1).$$

2.Für $x > 0$ gilt $x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}\log(x)}$. Da $[\sqrt{x}\log(x)]$ bzw. exp differenzierbar in $\mathbb{R}_{>0}$ bzw. in $\mathbb{R}$ sind ist es die Verkettung nach der Kettenregel ebenfalls. Die Ableitung ist

$$\begin{aligned}(x^{\sqrt{x}})' &= (e^{\sqrt{x}\log(x)})' \\ &= e^{\sqrt{x}\log(x)}(\frac{1}{2\sqrt{x}}\log(x) + \sqrt{x}\frac{1}{x}) \\ &= e^{\sqrt{x}\log(x)}(\frac{1}{2\sqrt{x}}\log(x) + \frac{1}{\sqrt{x}}) \\ &= x^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}}(\frac{1}{2}\log(x)+1).\end{aligned}$$

3. f und g sind nach 1. und 2. differenzierbar. Da sin und log ebenfalls differenzierbare Funktionen sind und da $\sin(x^{\sqrt{x}} + x^x)^4 + 1 > 0$ ist auch h differenzierbar. Die Ableitung ist

$$\begin{aligned}h'(x) &= \frac{1}{\sin(x^{\sqrt{x}} + x^x)^4 + 1} 4\sin(x^{\sqrt{x}} + x^x)^3\cos(x^{\sqrt{x}} + x^x)(x^{\sqrt{x}} + x^x)' \\ &= \frac{1}{\sin(x^{\sqrt{x}} + x^x)^4 + 1} 4\sin(x^{\sqrt{x}} + x^x)^3\cos(x^{\sqrt{x}} + x^x)\left(x^x(\log(x)+1) + x^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}}(\frac{1}{2}\log(x)+1)\right).\end{aligned}$$

Hausaufgabe 12.2

1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in (a,b) mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$. Zeigen Sie, dass f konstant ist mit

$$f(x) = f(a) = f(b)$$

für alle $x \in [a,b]$.

(Hinweis: Mittelwertsatz)

2. Zeigen Sie, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

gleich 1 ist.

3. Sei

$$f : (-1,1) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

und

$$g : (-\infty, \log(2)) \to (-1,1) \subseteq \mathbb{R}, x \mapsto e^x - 1.$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist und dass

$$f \circ g(x) = x$$

für alle $x \in (-\infty, \log(2))$ gilt.

(Hinweis: Berechnen Sie f' indem Sie die Potenzreihe ableiten und benutzen Sie die Formel für die geometrische Reihe. Wenden Sie anschließend die Kettenregel auf $f \circ g$ an und verwenden Sie Hausaufgabe 12.2.1)

4. Folgern Sie aus 3. die Identität

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

für jedes $x \in (-1,1)$.

Beweis:

1. Sei $x \in (a,b]$. Dann existiert nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in (a,x)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Da $f'(y) = 0$ für alle $y \in (a,b)$ ist auch $f'(\xi) = 0$ und somit $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$, was aufgrund von $x - a \neq 0$ äquivalent zu $f(x) = f(a)$ ist. Damit folgt 1.

2. Für $x \neq 0$ gilt

$$\left| \frac{\frac{(-1)^{k+1-1}}{k+1}}{\frac{(-1)^{k-1}}{k}} \right| |x| = \frac{k}{k+1} |x| \to |x|$$

also ist der Konvergenzradius nach dem Quotientenkriterium gleich 1.

3. Der Konvergenzradius der Potenzreihe in 2. ist gleich 1, also ist die Potenzreihe als Funktion in $(-1,1)$ (unendlich oft) differenzierbar nach einem Satz in der Vorlesung. Außerdem gilt nach dem gleichen Satz, dass die Ableitung von f gegeben ist durch

gliedweise Differenzierung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right)' \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right)' \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k \\ &= \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

für $x \in (-1, 1)$ nach der Formel für die geometrische Reihe. Die Ableitung von g ist gegeben durch $g'(y) = e^y = 1 + g(y)$ für alle $y \in (-\infty, \log(2))$.

Anwendung der Kettenregel liefert

$$(f \circ g)'(y) = f'(g(y))g'(y) = \frac{1}{1+g(y)}(1 + g(y)) = 1$$

für alle $y \in (-\infty, \log(2))$. Demnach gilt

$$((f \circ g) - x)'(y) = 1 - 1 = 0.$$

für alle $y \in (-\infty, \log(2))$. Damit ist $(f \circ g) - x$ nach HA 12.2.1 konstant und wegen $f \circ g(0) - 0 = f(g(0)) = f(0) = 0$ folgt $f \circ g(y) = y$ für alle $y \in (-\infty, \log(2))$.

4. Es gilt $g(\log(1 + x)) = e^{\log(1+x)} - 1 = x$ für alle $x \in (-1, 1)$ und $\log(1 + \cdot) : (-1, 1) \to (-\infty, \log(2))$ ist eine Bijektion. Nach 3. gilt also

$$f(x) = f \circ g(\log(1 + x)) = \log(1 + x)$$

für alle $x \in (-1, 1)$.

Hausaufgabe 12.3 Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x + \sum_{k=1}^{24} x^{2k+1}$$

1. Zeigen Sie, dass f bijektiv, streng monoton wachsend und differenzierbar ist.
2. Folgern Sie, dass die Umkehrfunktion von f differenzierbar ist und bestimmen Sie

$$(f^{-1})'(1).$$

Lösung:

e^x ist differenzierbar und $\sum_{k=1}^{24} x^{2k+1}$ als Polynomfunktion ebenfalls, also ist auch f differenzierbar. Es gilt

$$\lim_{x \to +\infty} e^x + \sum_{k=1}^{24} x^{2k+1} = +\infty$$

und

$$\lim_{x \to -\infty} e^x + \sum_{k=1}^{24} x^{2k+1} = 0 + (-\infty) = -\infty$$

nach HA 10.2.1. Da f differenzierbar, also auch stetig ist, folgt die Surjektivität von f aus dem Zwischenwertsatz. f ist streng monoton wachsend nach dem Mittelwertsatz, da

$$f'(x) = e^x + \sum_{k=1}^{24} (2k+1)x^{2k} > 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist f auch injektiv, also bijektiv.

2. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion ist f^{-1} differenzierbar mit Ableitung $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ für $y \in \mathbb{R}$. Für $y = 1$ ergibt sich $f^{-1}(1) = 0$ und

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{e^0 + \sum_{k=1}^{24}(2k+1)0^{2k}} = 1.$$

Hausaufgabe 12.4 Untersuchen Sie die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{x^4+1}$$

und

$$g : \left[-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{x^4+1}$$

auf lokale und globale Maxima und Minima (Begründen Sie Ihre Antwort).

Lösung:

f ist differenzierbar , da $x^4+1 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und sowohl Zähler als auch Nenner differenzierbar sind. Demnach muss eine Extremstelle x die Bedingung $f'(x) = 0$ erfüllen. Es gilt

$$f'(x) = \frac{x^4+1-x4x^3}{(x^4+1)^2} = \frac{-3x^4+1}{(x^4+1)^2} = 0$$

genau dann wenn

$$-3x^4 + 1 = 0.$$

Für $x \in \mathbb{R}$ ist das genau dann der Fall wenn $x \in \left\{-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right\}$.

Es ist noch zu prüfen, ob es sich hierbei wirklich um Minima / Maxima handelt:

f ist zwei mal differenzierbar und es gilt

$$
\begin{aligned}
&f''\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)\\
&= \frac{-12\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^3\left(\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^4+1\right)^2-\left(-3\left(\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^4+1\right)\right)2\left(\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^4+1\right)4\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^3}{\left(\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^4+1\right)^4}\\
&= \frac{-12\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^3\left(\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^4+1\right)^2-0}{\left(\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^4+1\right)^4}\\
&= \frac{(\mp)12\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^3\left(\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^4+1\right)^2}{\left(\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^4+1\right)^4}
\end{aligned}
$$

Dieser Ausdruck ist < 0 im Fall $x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ und > 0 im Fall $x = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$. Also ist $x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ ein lokales Maximum und $x = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ ein lokales Minimum. f besitzt sonst keine Extremstellen. Da $-3x^4+1>0$ ist für alle $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{4}}\right)$ und $-3x^4+1>0$ für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\left[-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{4}}\right]$ handelt es sich sogar um ein globales Maximum / Minimum.

Für g ergibt sich sofort aus den Ergebnissen für f, dass g nur eine Extremstelle bei $x = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ besitzt, bei der es sich um ein globales Minimum handelt.

Abgabe der Hausaufgaben bis zum Sonntag den 21.01.2024, 23.59 Uhr in Panda.