Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

Analysis für Informatiker

12. Präsenzübungsblatt - Lösungen

Präsenzaufgabe 12.1 Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \sin(\log(x)) & x > 0 \\ x^2 - 2 & x < 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

auf lokale und globale Maxima und Minima.

Lösung:

Es gilt $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 - 2 = \infty$ also existiert kein globales Maximum. f ist in $(-\infty, 0)$ differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = 2x$, also hat f in $(-\infty, 0)$ keine Extremstellen. Es gilt $-2 < f(x) < 2$ für $x \in (-2, 0)$ und da $\sin(\log(x)) \in [-1, 1]$ für alle $x > 0$ ist $x = 0$ ein lokales (aber kein globales) Maximum. f ist in $\mathbb{R}_{>0}$ differenzierbar mit erster Ableitung

$$f'(x) = \frac{\cos(\log(x))}{x}.$$

und zweiter Ableitung

$$f^{(2)}(x) = \frac{-\sin(\log(x))\frac{1}{x}x - \cos(\log(x))}{x^2} = \frac{-\sin(\log(x)) - \cos(\log(x))}{x^2}.$$

Damit kann f in $\mathbb{R}_{>0}$ nur in den Punkten

$$x_n := e^{\frac{\pi}{2}+\pi n}$$

für $n \in \mathbb{Z}$ Extremstellen besitzen.

Es gilt

$$f^{(2)}(x_n) = \frac{-\sin(\log(x_n)) - \cos(\log(x_n))}{x_n^2} = \frac{-\sin(\frac{\pi}{2} + \pi n)}{x_n^2} = \frac{(-1)(-1)^n}{x_n^2} = \frac{(-1)^{n+1}}{x_n^2}.$$

Also ist x_n für gerades $n \in \mathbb{Z}$ ein lokales Maximum und für ungerades $n \in \mathbb{Z}$ ein lokales Minimum. Wir wissen bereits, dass es keine globalen Maxima gibt. Da $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = -2$, aber offensichtlich $f(x) > -2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, existiert auch kein globales Minimum.

Präsenzaufgabe 12.2 Bestimmen Sie alle Taylorpolynome T_n und die zugehörigen Restglieder R_n ($n \in \mathbb{N}_0$) im Entwicklungspunkt $x = 0$ der Funktionen cos, sinh und arctan und zeigen Sie, dass $T_n \cos(x, 0) \to \cos(x), T_n \sinh(x, 0) \to \sinh(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \to \infty$ und $T_n \arctan(x, 0) \to \arctan(x)$ für alle $x \in (-1, 1)$ und $n \to \infty$. Zeigen Sie anschließend die Identität

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{3^j(2j+1)}.$$

Beweis:
1. cos: Es gilt $\cos^{(2n)}(0) = (-1)^n \cos(0) = (-1)^n$ und $\cos^{(2n+1)}(0) = (-1)^{n+1}\sin(0) = (-1)^{n+1} \cdot 0 = 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Damit folgt

$$(T_n \cos)(x,0) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

Für $0 \neq x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ existiert ein $\xi_n \in (0,x)$ sodass

$$|(R_n \cos)(x,0)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi_n)|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

(Lagrangsche Restglied Formel) für $n \to \infty$. Damit folgt $T_n \cos(x,0) \to \cos(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

2. sinh: Es gilt $\sinh^{(2n)}(0) = \sinh(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $\sinh^{(2n+1)}(0) = \cosh(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Demnach folgt

$$(T_n \sinh)(x,0) = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Für $x \neq 0$ in $\mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ existiert ein $\xi_n \in (0,x)$, sodass

$$|(R_n \sinh)(x,0)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi_n)|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{C_x}{(n+1)!}|x|^{n+1} \to 0$$

für $n \to \infty$. Hier bezeichnet

$$C_x := \max\{\sup_{y \in [0,x]} |\sinh(y)|, \sup_{y \in [0,x]} |\cosh(y)|\}.$$

eine von $n \in \mathbb{N}_0$ unabhängige (aber von x abhängige) Konstante. Damit folgt $T_n \sinh(x,0) \to \sinh(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

3. arctan. Es sei $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$. Dann ist tan differenzierbar mit $\lim_{x \downarrow -\pi/2} = -\infty$ und $\lim_{x \uparrow \pi/2} = \infty$. Da tan stetig (sogar unendlich oft differenzierbar) ist, ist tan nach dem Zwischenwertsatz surjektiv. Da $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) > 0$ für alle $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ ist tan strikt monoton wachsend, also auch injektiv und somit bijektiv. Da $\tan'(x) \neq 0$ für alle $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, ist die Umkehrfunktion, genannt $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ ebenfalls differenzierbar mit Ableitung

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan(\arctan(x))^2} = \frac{1}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Die Funktion $\arctan' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ ist unendlich oft differenzierbar mit n-ter Ableitung ($n \in \mathbb{N}_0$)

$$\begin{aligned}
\arctan^{(n+1)}(x) &= \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)} \\
&= \left(\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)\right)^{(n)} \\
&= (-1)^n \frac{n!}{2i}\left(\frac{1}{(x-i)^{n+1}} - \frac{1}{(x+i)^{n+1}}\right).
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\arctan^{(n+1)}(0) &= (-1)^n \frac{n!}{2i}\left(\frac{1}{(-i)^{n+1}} - \frac{1}{i^{n+1}}\right)\\
&= (-1)^n \frac{n!}{2i}\left(i^{n+1} - (-1)^{n+1}(i)^{n+1}\right)\\
&= \begin{cases} 0 & n \in 2\mathbb{N}_0 + 1\\ n! & n \in 4\mathbb{N}_0\\ (-1)n! & n \in 2 + 4\mathbb{N}_0\end{cases}\\
&= \begin{cases} 0 & n \in 2\mathbb{N}_0 + 1\\ (-1)^{n/2} n! & n \in 2\mathbb{N}_0\end{cases}
\end{aligned}$$

und damit wegen $\arctan(0) = 0$

$$\arctan^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & n \in 2\mathbb{N}\\ (-1)^{(n-1)/2}(n-1)! & n \in 2\mathbb{N}_0 + 1\end{cases}.$$

Somit folgt

$$(T_n \arctan)(x, 0) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2k)!}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.
Für $x \in (-1, 1)$ und $n \in \mathbb{N}_0$ existiert ein $\xi_n \in (0, x)$, sodass (Lagransche Restgliedformel)

$$\begin{aligned}
|(R_n \arctan)(x, 0)| &= \frac{|\arctan^{(n+1)}(\xi_n)|}{(n+1)!}|x|^{n+1}\\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left|(-1)^n \frac{n!}{2i}\left(\frac{1}{(\xi_n - i)^{n+1}} - \frac{1}{(\xi_n + i)^{n+1}}\right)\right| |x|^{n+1}\\
&= \frac{1}{n+1}\frac{1}{2}\left|\frac{1}{(\xi_n - i)^{n+1}} - \frac{1}{(\xi_n + i)^{n+1}}\right| |x|^{n+1}\\
&\leq \frac{1}{n+1}\frac{1}{2}(1+1)|x|^{n+1}\\
&= \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \to 0
\end{aligned}$$

für $n \to 0$, da $|x| < 1$ und da

$$\left|\frac{1}{(y-i)^{n+1}} - \frac{1}{(y+i)^{n+1}}\right| \leq \frac{1}{(|y-i|^{n+1}} + \frac{1}{|y+i|^{n+1}} \leq 1 + 1 = 2$$

für alle $y \in \mathbb{R}$. Da

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

und da $0\frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ folgt die Identität

$$\frac{\pi}{6} = \arctan(1/\sqrt{3}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\frac{1}{3^k}.$$

Präsenzaufgabe 12.3 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{4\cos(x)\sinh(x^2)}{\sqrt{3}x^2+\cosh(x)-1}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x)-\sin(2x)}{x-\sin(x)}$
3. $\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
4. $\lim_{x\to\infty} (x^{\frac{3}{2}}+1)^{\frac{1}{\log(x)}}$.

Lösung: 1. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{4\cos(x)\sinh(x^2)}{\sqrt{3}x^2+\cosh(x)-1} &= \frac{4(1+\mathcal{O}(x^2))(x^2+\mathcal{O}(x^6))}{\sqrt{3}x^2+\frac{1}{2}x^2+\mathcal{O}(x^4)} \\ &= \frac{4(1+\mathcal{O}(x^2))(x^2+\mathcal{O}(x^6))}{(\sqrt{3}+\frac{1}{2})x^2+\mathcal{O}(x^4)} \\ &= \frac{4x^2+\mathcal{O}(x^4)}{(\sqrt{3}+\frac{1}{2})x^2+\mathcal{O}(x^4)} \\ &= \frac{4+\mathcal{O}(x^2)}{(\sqrt{3}+\frac{1}{2})+\mathcal{O}(x^2)} \\ &\to \frac{4}{(\sqrt{3}+\frac{1}{2})}.\end{aligned}$$

für $x \to 0$.

2. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{2\sin(x)-\sin(2x)}{x-\sin(x)} &= \frac{2(x-\frac{1}{6}x^3+\mathcal{O}(x^5))-2x+\frac{8}{6}x^3+\mathcal{O}(x^5)}{x-x+\frac{1}{6}x^3+\mathcal{O}(x^5)} \\ &= \frac{x^3+\mathcal{O}(x^5)}{\frac{1}{6}x^3+\mathcal{O}(x^5)} \\ &= \frac{1+\mathcal{O}(x^2)}{\frac{1}{6}+\mathcal{O}(x^2)} \\ &\to 6.\end{aligned}$$

3. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $e^{-x} \leq n+1!\frac{1}{x^{n+1}}$ für alle $x>0$ und demnach

$$|x^n e^{-x}| = |x|^n e^{-x} \leq (n+1)!|x|^n \frac{1}{|x|^{n+1}} = (n+1)!\frac{1}{|x|} \to 0$$

für $x\to\infty$. Demnach ist $\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

4. Es gilt

$$(x^{\frac{3}{2}}+1)^{\frac{1}{\log(x)}} = e^{\frac{\log(x^{\frac{3}{2}}+1)}{\log(x)}}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\log(x^{\frac{3}{2}}+1)}{\log(x)} &= \frac{\log(x^{\frac{3}{2}})+\log(1+x^{-\frac{3}{2}}))}{\log(x)} \\ &= \frac{\log(x^{\frac{3}{2}})}{\log(x)}+\frac{1}{\log(x)}(\log(1+x^{-\frac{3}{2}}) \\ &= \frac{3}{2}+\frac{1}{\log(x)}(\log(1+x^{-\frac{3}{2}}) \\ &\to \frac{3}{2}+0\log(1+0) \\ &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Da exp stetig ist gilt

$$\lim_{x\to\infty}(x^{\frac{3}{2}}+1)^{\frac{1}{\log(x)}} = e^{3/2} = \sqrt{e^3}.$$

Präsenzaufgabe 12.4 Sei $f : U \to \mathbb{R}$ mit

1. $U = \mathbb{R}$, $f(x) = 5x^{117} + 4x^7 + 3x^{23} + 1$
2. $U = \mathbb{R}_{>0}$, $f(x) = e^{5x^{10}}x^9 + \frac{7}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x^5}$
3. $U = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \frac{1}{(1-x)^{100}}$
4. $U = \mathbb{R}_{>0}$, $f(x) = \frac{1-\log(x)}{x^2}$
5. $U = \mathbb{R}$, $f(x) = 2x\cosh(x^2+1)$

Bestimmen Sie für jede der oben angegebenen Funktionen jeweils eine differenzierbare Funktion $F : U \to \mathbb{R}$ mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung: 1. $F(x) = \frac{5}{118}x^{118} + \frac{1}{2}x^8 + \frac{3}{24}x^{24} + x$

2. $F(x) = \frac{1}{50}e^{5x^{10}} + 14\sqrt{x} - \frac{5}{4}\frac{1}{x^4}$

3. $F(x) = \frac{1}{99}\frac{1}{(1-x)^{99}}$

4. $F(x) = \frac{\log(x)}{x}$ (Quotientenregel).

5. $F(x) = \sinh(x^2+1)$, da $\sinh'(x) = \cosh(x)$ und nach der Kettenregel

---