Universität Paderborn Wintersemester 23/24
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Analysis für Informatiker

13. Hausaufgabenblatt - Lösungen

Hausaufgabe 13.1 Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \begin{cases} \sin(1/x) & x \in [-2/\pi, 2/\pi] \setminus \{0\} \\ e^{|x|} + 5 & |x| > 2/\pi \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

auf lokale und globale Maxima und Minima. Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung: Es gilt $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$, also gibt es kein globales Maximum. f ist differenzierbar in $\mathbb{R} \setminus [-2/\pi, 2/\pi]$ und für $|x| > 2/\pi$ gilt $f'(x) = \operatorname{sign}(x)e^{|x|}$, wobei

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}.$$

Somit gilt $f'(x) \neq 0$ für $|x| > 2/\pi$, also hat f dort keine Extremstellen. Im Punkt $x = -2/\pi$ ist f gleich $\sin(-\pi/2) = -1$. Da $f(x) \geq -1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist, ist $x = -2/\pi$ ein globales Minimum. In $(-2/\pi, 2/\pi)\setminus\{0\}$ ist f (unendlich oft) differenzierbar mit erster Ableitung

$$f'(x) = -\frac{\cos(1/x)}{x^2}$$

und zweiter Ableitung

$$f^{(2)}(x) = \frac{2\cos(1/x)}{x^3} - \frac{\sin(1/x)}{x^4}.$$

Damit kommen als Extremstellen in $(-2/\pi, 2/\pi)\setminus\{0\}$ nur die Punkte $x_n := \frac{2}{(2n+1)\pi}$ für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$ in Betracht. Für diese Punkte gilt $f^{(2)}(x_n) = 0 - \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\pi n)}{x_n^4} = \frac{(-1)^{n+1}}{x_n^4}$, was < 0 ist für $n \in 2\mathbb{Z}$ und > 0 für $n \in 2\mathbb{Z}+1$. Dementsprechend handelt es sich bei den x_n für $n \in 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ um lokale (aber keine globalen) Maxima von f. Für $n \in 2\mathbb{Z} + 1$ handelt es sich um lokale und sogar globale Minima, da in diesem Fall $f(x_n) = -1$ gilt. Der Punkt $x = 0$ ist keine Extremstelle, da $f(x_n) = \pm 1$ für $n \in \mathbb{Z}$, aber $x_n \to 0$ für $n \to \infty$ und $f(0) = 0$. Also kann $x = 0$ weder lokales Minimum noch lokales Maximum sein. Wir müssen noch den Punkt $x = 2/\pi$ untersuchen. Da $f(2/\pi) = 1$ aber $e^x + 5 > 5$ für alle $x > 2/\pi$ kann $x = 2\pi$ kein lokales Maximum sein. Es kann aber auch kein lokales Minimum sein, da $\sin(1/x)$ im Intervall $(\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}]$ strikt monoton wachsend ist. Damit sind die einzigen Extremstellen gegeben durch

$$x_n = \frac{1}{(2n+1)}\frac{2}{\pi}$$

für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Für $n \in 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist x_n ein lokales Maximum, für $n \in 2\mathbb{Z} + 1$ ein globales Minimum. Es gibt keine weiteren Extremstellen.

Hausaufgabe 13.2

1. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Bestimmen Sie, dass n-te Taylorpolynom von $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Entwicklungspunkt $x = 0$. Zeigen Sie zudem, dass für das n-te Restglied $(R_n \sin)(x, 0)$ von sin in $x = 0$ die Abschätzung
$$|(R_n \sin)(x, 0)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$
für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Folgern Sie, dass $\sin(x) = \lim_{n\to\infty}(T_n \sin)(x, 0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

2. Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}_0$, das n-te Taylorpolynom von log im Entwicklungspunkt $x = 1$ gegeben ist durch
$$(T_n \log)(x, 1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k.$$
Zeigen Sie anschließend, dass $\log(x) = \lim_{n\to\infty}(T_n \log)(x, 1)$ für alle $x \in (0, 2)$ gilt (Hinweis: Langrangsches Restglied oder wenden Sie Hausaufgabe 12.2 an).

3. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Bestimmen Sie das n-te Taylorpolynom $(T_n f)(x, 0)$ im Entwicklungspunkt $x = 0$ der unendlich oft differenzierbaren Funktion
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$
Zeigen Sie zudem, dass $T_n f(x, 0)$ für $x \neq 0$ und $n \to \infty$ nie gegen $f(x)$ konvergiert (Hinweis: Verwenden Sie Präsenzaufgabe 10.4.).

Lösung: 1. sin ist unendlich oft differenzierbar mit
$$\sin^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin(x)$$
für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und
$$\sin^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos(x)$$
für alle $n \in 2\mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$. Demnach ergibt sich
$$a_{2n+1}\frac{\sin^{(2n+1)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$
und $a_{2n} = \frac{\sin^{(2n)}(0)(x)}{(2n)!} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Damit ergibt sich
$$(T_n \sin)(x, 0) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$
Für das n-te Restglied gilt nach der Vorlesung die Lagrangsche Formel und existiert für jedes $0 \neq x \in \mathbb{R}$ ein $\xi_n \in (0, x)$ sodass
$$|(R_n \sin)(x, 0)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi_n)|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$
da $|\cos|$ und $|\sin|$ durch Eins beschränkt sind. Wegen
$$|\sin(x) - T_n \sin(x, 0)| = |R_n \sin(x, 0)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ folgt $T_n \sin(x, 0) \to \sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

2. log ist in $\mathbb{R}_{>0}$ unendlich oft differenzierbar und es gilt

$$\log^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{x^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit gilt für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}(T_n \log)(x, 1) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}(x-1)^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k.\end{aligned}$$

Aus Hausaufgabe 12.2 wissen wir, dass

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

für $x \in (-1, 1)$ was äquivalent zu

$$\log(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k = \lim_{n\to\infty}(T_n \log)(x, 1)$$

für $x \in (0, 2)$ ist. Damit folgt 2. (ohne Verwendung der Hausaufgabe 12.2: Für $1 \neq x \in (0, 2)$ und $n \in \mathbb{N}_0$ existiert nach der Lagransche Formel für das n-te Restglied ein $\xi_n \in (1, x)$

$$\begin{aligned}|(R_n \log)(x, 1)| &\leq \frac{|\log^{(n+1)}(\xi_n)|}{(n+1)!}|x-1|^{n+1} \\ &= \frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{|x-1|}{|\xi_n|}\right)^{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\frac{|x-1|}{|\xi_n|}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \to 0\end{aligned}$$

für $n \to \infty$, da für $\xi_n \in (1, x)$ (egal ob $0 < x < 1$ oder $1 < x < 2$) immer $0 < \frac{|x-1|}{|\xi_n|} < 1$ gilt.)

3. Nach PA 10.4 verschwinden alle Ableitungen von f in 0, also gilt $(T_n f)(x, 0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da $f(x) \neq 0$ für alle $x \neq 0$ und $(T_n f)(x, 0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert $(T_n f)(x, 0)$ für kein $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gegen $f(x)$.

Hausaufgabe 13.3 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3(x)\cos(x)\sin(e^x-1)}{x^2+x+e^x-1}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)^2 \sinh(x)}{(e^x-1)^2 x}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x^4+2x}$

4. $\lim_{x\downarrow 0} x^2 \log(x)$

Lösung:

1. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\sin^3(x)\cos(x)\sin(e^x-1)}{x^2+x+e^x-1} &= \frac{(x+\mathcal{O}(x^3))^3(1+\mathcal{O}(x^2))(x+\mathcal{O}(x^2))}{x^2+x+e^x-1}\\ &= \frac{x^4+\mathcal{O}(x^5)}{x^2+x+e^x-1}\\ &= \frac{x^4+\mathcal{O}(x^5)}{x^2+x+x+\mathcal{O}(x^2)}\\ &= \frac{x^4+\mathcal{O}(x^5)}{2x+\mathcal{O}(x^2)}\\ &= \frac{x^3+\mathcal{O}(x^4)}{2+\mathcal{O}(x)} \to \frac{0}{2+0} = 0.\end{aligned}$$

2. Es gilt

$$\frac{\sin(x)^2\sinh(x)}{(e^x-1)^2x} = \frac{(x+\mathcal{O}(x^3))^2(x+\mathcal{O}(x^3))}{(e^x-1)^2x} = \frac{x^3+\mathcal{O}(x^4)}{x^3+\mathcal{O}(x^4)} = \frac{1+\mathcal{O}(x)}{1+\mathcal{O}(x)} \to 1$$

für $x \to 0$.

3. Es gilt

$$\frac{e^x-1}{x^4+2x} = \frac{x+\mathcal{O}(x^2)}{2x+x^4} = \frac{1+\mathcal{O}(x)}{2+x^3} \to \frac{1}{2}$$

für $x \to 0$.

4. Es gilt

$$\lim_{x\downarrow 0} x^2\log(x) = \lim_{x\to\infty}(e^{-x})^2\log(e^{-x}) = \lim_{x\to\infty} e^{-2x}(-x) = 0.$$

Bonusaufgabe (25 Punkte): Sei $f : U \to \mathbb{R}$ mit

1. $U = \mathbb{R}$, $f(x) = 9x^3 - 4x^2 + \frac{1}{2}x - 1$
2. $U = \mathbb{R}_{>0}$, $f(x) = e^{3x^2}x + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x}$
3. $U = \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$, $f(x) = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}(x-1)-\sqrt{x^3}}{(x-1)^2}$
4. $U = \mathbb{R}_{>0}$, $f(x) = \log(x)$
5. $U = \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - 2\sin(x)^2$

Bestimmen Sie für jede der oben angegebenen Funktionen jeweils eine differenzierbare Funktion $F : U \to \mathbb{R}$ mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung: Bemerkung: Jede Funktion F die angegeben wird kann immer durch $F + c$ für $c \in \mathbb{R}$ ersetzt werden, da $(F + c)' = F' = f$.

1. $F(x) := \frac{9}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - x$.

2. $F(x) = \frac{1}{6}e^{3x^2} + 2\sqrt{x} + 4\log(x)$

3. $F(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{x-1}$ (Quotientenregel)

4. $F(x) = x\log(x) - x = x(\log(x) - 1)$

5. $F(x) = \sin(x)\cos(x)$, da $(\sin(x)\cos(x))' = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)$.

Abgabe der Hausaufgaben bis zum Sonntag den 28.01.2024, 23.59 Uhr in Panda.