Universität Paderborn Wintersemester 23/24
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

# Analysis für Informatiker

## 13. Präsenzübungsblatt - Lösungen

**Präsenzaufgabe 13.1** Berechnen Sie die folgenden Integrale

1. $\int_a^b p(x)\,dx$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_j \in \mathbb{R}$ für alle $j = 0, \cdots, n$.
2. $\int_0^1 x^2 + \sqrt{1-x}\,dx$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,dx$
4. $\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$
5. $\int_0^\pi x^3 \cos(x)\,dx$
6. $\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$
7. $\int_1^e \frac{\log(x)}{x(\log^2(x)-\log(x)+1)}\,dx$

**Lösung:**

1. Eine Stammfunktion des Polynoms $p$ ist das Polynom

$$P(x) = \sum_{j=0}^n \frac{a_j}{j+1} x^{j+1}.$$

Damit folgt nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung (im folgenden mit (H) bezeichnet), dass

$$\int_a^b p(x)dx = P(b) - P(a) = \sum_{j=0}^n \frac{a_j}{j+1} b^{j+1} - \sum_{j=0}^n \frac{a_j}{j+1} a^{j+1}.$$

2. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2 + \sqrt{1-x}\,dx &= \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \sqrt{1-x}dx \\
&= \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 + (-1)\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{3} - 0 + (-1)\frac{2}{3}(1-1)^{\frac{3}{2}} - (-1)\frac{2}{3}(1-0)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \\
&= 1
\end{aligned}$$

3. Eine Stammfunktion von $\tan = \frac{\sin}{\cos} : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $F(x) = \log\left(\frac{1}{\cos}\right) : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx &= \log\left(\frac{1}{\cos(\pi/4)}\right) - \log\left(\frac{1}{\cos(0)}\right) \\ &= \log\left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) - \log(1) \\ &= \log(\sqrt{2}) \\ &= \frac{1}{2}\log(2).\end{aligned}$$

4. Es gilt (nach Substitutionsregel ($\phi(x) := x^2$) und partieller Integration)

$$\begin{aligned}\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx &= \int_0^2 e^x (x^2)' dx \\ &= 2\int_0^2 e^x x dx \\ &= 2\left(e^x x\Big|_0^2 - \int_0^2 e^x x' dx\right) \\ &= 2\left(2e^2 - 0e^0 - \int_0^2 e^x\, 1\, dx\right) \\ &= 2\left(2e^2 - \left(e^x\Big|_0^2\right)\right) \\ &= 2\left(2e^2 - e^2 + e^0\right) \\ &= 2(e^2 + 1).\end{aligned}$$

5. Nach wiederholter partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x^3 \cos(x)\, dx &= (\sin(x)x^3)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin(x) 3x^2 dx \\ &= 0 - 0 - 3\int_0^\pi \sin(x) x^2 dx \\ &= 3\left(\int_0^\pi -\sin(x) x^2 dx\right) \\ &= 3\left(\cos(x) x^2\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos(x) 2x dx\right) \\ &= 3\left(-\pi^2 - 2\int_0^\pi \cos(x) x dx\right) \\ &= 3\left(-\pi^2 - 2\left(\sin(x) x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin(x) dx\right)\right) \\ &= 3\left(-\pi^2 - 2\left(0 + \cos(x)\Big|_0^\pi\right)\right) \\ &= 3(-\pi^2 - 2(-1-1)) \\ &= 3(-\pi^2 + 4) \\ &= -3\pi^2 + 12.\end{aligned}$$

6. Es gilt (Substitutionsregel mit $\phi(x) = \sqrt{x-1}$)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}dx &= \int_1^2 (\sqrt{x-1})^3\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x-1}}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 (x-1)\sqrt{x}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\,dx \\
&= \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 \\
&= \frac{1}{5}2^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}2^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \\
&= \frac{2}{5}2^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}2^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{15}2^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{15} \\
&= \frac{2}{15}(\sqrt{2}+1).
\end{aligned}$$

7. Es gilt (Substitutionstregel mit $\phi(x) = e^x$)

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{\log(x)}{x(\log^2(x) - \log(x) + 1)}\,dx &= \int_0^1 \frac{x}{e^x(x^2-x+1)}(e^x)'dx \\
&= \int_0^1 \frac{x}{(x^2-x+1)}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{(x^2-x+1)}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x-1}{(x^2-x+1)}dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(x^2-x+1)}dx \\
&= \frac{1}{2}\log(x^2-x+1)\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(x^2-x+1)}dx \\
&= 0 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\frac{3}{4}((\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}})^2+1)}dx \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}})^2+1}dx \\
&= \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}(\arctan(1/\sqrt{3}) - \arctan(-1/\sqrt{3})) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(1/\sqrt{3}) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{9}\pi.
\end{aligned}$$

Hinweis: Die Identität

$$(x^2 - x + 1) = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right)$$

ergibt sich die Scheitelpunktform

$$(x^2 - x + 1) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

und anschließendes ausklammern von $\frac{3}{4}$.

**Präsenzaufgabe 13.2** Überprüfen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz. Geben Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert an.

1. $\int_0^1 x^\alpha \, dx$ wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. $\int_1^\infty x^\alpha \, dx$ wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. $\int_0^1 \log(x) \, dx$
4. $\int_0^1 \frac{1}{\sin(x)} \, dx$
5. $\int_0^\infty \frac{x}{x+1} dx$
6. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt{x}} \, dx$

**Lösung:**

1. Für $\epsilon > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_\epsilon^1 x^\alpha dx &= \begin{cases} \log(x)\Big|_\epsilon^1 & \alpha = -1 \\ \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\Big|_\epsilon^1 & \alpha \neq -1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} -\log(\epsilon) & \alpha = -1 \\ \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}\epsilon^{\alpha+1} & \alpha \neq -1 \end{cases} \\
&\to \begin{cases} +\infty & \alpha = -1 \\ \frac{1}{\alpha+1} & \alpha > -1 \\ +\infty & \alpha < -1. \end{cases}
\end{aligned}$$

für $\epsilon \downarrow 0$.

2. Für $y > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_1^y x^\alpha dx &= \begin{cases} \log(x)\Big|_1^y & \alpha = -1 \\ \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\Big|_1^y & \alpha \neq -1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \log(y) & \alpha = -1 \\ \frac{1}{\alpha+1} y^{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} & \alpha \neq -1 \end{cases} \\
&\to \begin{cases} +\infty & \alpha = -1 \\ +\infty & \alpha > -1 \\ -\frac{1}{\alpha+1} & \alpha < -1. \end{cases}
\end{aligned}$$

für $y \to +\infty$.

3. Für $\epsilon > 0$ gilt nach L'Hopital

$$\int_\epsilon^1 \log(x)dx = (x\log(x) - x)\Big|_\epsilon^1 = -1 - \epsilon\log(\epsilon) + \epsilon \to -1 - 0 + 0 = -1$$

für $\epsilon \downarrow 0$.

4. Für $0 < x \leq 1$ gilt $0 < \sin(x) < x$, also auch $\frac{1}{\sin(x)} > \frac{1}{x}$. Somit folgt nach 1. mit $\alpha = -1$

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{\sin(x)}dx \geq \int_\epsilon x^{-1}dx \to +\infty$$

für $\epsilon \downarrow 0$.

5. Für $x \geq 1$ gilt $\frac{1}{2} = \frac{x}{x+x} \leq \frac{x}{x+1}$. Damit für $y > 1$ :

$$\int_0^y \frac{x}{x+1}dx \geq \int_1^y \frac{x}{x+1}dx \geq \int_1^y \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}(y-1) \to +\infty$$

für $y \to \infty$ (Die Divergenz folgt auch sofort aus $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1(> 0)$).

6. Für $y > 1$ gilt

$$
\begin{aligned}
\int_1^y \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx &= \int_1^{\sqrt{y}} \frac{1}{x^4+x} 2x\,dx \\
&= 2\int_1^{\sqrt{y}} \frac{1}{x^3+1} dx \\
&= 2\int_1^{\sqrt{y}} \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} dx \\
&= 2\int_1^{\sqrt{y}} \frac{\frac{1}{3}}{x+1} dx + 2\int_1^{\sqrt{y}} \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1} dx \\
&= 2\int_1^{\sqrt{y}} \frac{\frac{1}{3}}{x+1} dx - 2\frac{1}{3}\int_1^{\sqrt{y}} \frac{x-2}{x^2-x+1} dx \\
&= 2\int_1^{\sqrt{y}} \frac{\frac{1}{3}}{x+1} dx - \frac{1}{3}\int_1^{\sqrt{y}} \frac{2x-4}{x^2-x+1} dx \\
&= 2\int_1^{\sqrt{y}} \frac{\frac{1}{3}}{x+1} dx - \frac{1}{3}\int_1^{\sqrt{y}} \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx - \frac{1}{3}\int_1^{\sqrt{y}} \frac{-3}{x^2-x+1} dx \\
&= 2\int_1^{\sqrt{y}} \frac{\frac{1}{3}}{x+1} dx - \frac{1}{3}\int_1^{\sqrt{y}} \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \int_1^{\sqrt{y}} \frac{1}{x^2-x+1} dx \\
&= \frac{2}{3}\log(x+1)\Big|_1^{\sqrt{y}} - \frac{1}{3}\log(x^2-x+1)\Big|_1^{\sqrt{y}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\Big|_1^{\sqrt{y}} \\
&= \frac{2}{3}\log(\sqrt{y}+1) - \frac{1}{3}\log(\sqrt{y}^2-\sqrt{y}+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\sqrt{y}-1}{\sqrt{3}}\right) \\
&\quad - \frac{2}{3}\log(2) + \frac{1}{3}\log(1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(1/\sqrt{3}) \\
&= \frac{1}{3}\log\left(\frac{(\sqrt{y}+1)^2}{\sqrt{y}^2-\sqrt{y}+1}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\sqrt{y}-1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2}{3}\log(2) - \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} \\
&= \frac{1}{3}\log\left(\frac{y+2\sqrt{y}+1}{y-\sqrt{y}+1}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\sqrt{y}-1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2}{3}\log(2) - \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} \\
&\to \frac{1}{3}\log(1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\log(2) - \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\log(2) - \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} \\
&= \frac{2}{9}(\sqrt{3}\pi - \log(8))
\end{aligned}
$$

für $y \to \infty$. Um auf die vierte Gleichheit zu kommen, wählt man den Ansatz

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

und löst die Gleichung nach $a, b$ und $c$ auf.

## Präsenzaufgabe 13.3

1. Sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:

   Gilt $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in [-r, r]$, so ist

$$\int_{-r}^{r} f(x)dx = 0.$$

Gilt $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in [-r, r]$, so ist

$$\int_{-r}^{r} f(x) = 2\int_{0}^{r} f(x)dx.$$

2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $p \in \mathbb{R}_{>0}$ und $f(x + p) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für jedes $a \in \mathbb{R}$

$$\int_{a}^{a+p} f(x)dx = \int_{0}^{p} f(x)dx$$

gilt.

**Beweis:**

1. Sei $f$ ungerade, also $f(-x) = -f(x)$ für alle $x$ mit $|x| \leq r$. Dann gilt nach der Subsitutionsregel

$$\begin{aligned}
\int_{-r}^{r} f(t)dt &= \int_{r}^{-r} f(-x)(-x)'dx \\
&= \int_{r}^{-r} f(-x)(-1)dx \\
&= \int_{-r}^{r} f(-x)dx \\
&= \int_{-r}^{r} (-f)(x)dx \\
&= -\int_{-r}^{r} f(x)dx,
\end{aligned}$$

wobei die vorletzte Gleichung aus $f(-x) = -f(x)$ für $|x| \leq r$ folgt. Für eine reelle Zahl $y$ ist die Identität $y = -y$ aber genau dann wahr, falls $y = 0$ ist. Damit folgt

$$\int_{-r}^{r} f(x)dx = 0.$$

Sei $f$ nun gerade, d.h. $f(-x) = f(x)$ für $|x| \leq r$. Dann gilt nach der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}
\int_{-r}^{r} f(t)dt &= \int_{-r}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{r} f(t)dt \\
&= \int_{r}^{0} f(-x)(-1)dx + \int_{0}^{r} f(t)dt \\
&= \int_{0}^{r} f(-x)dx + \int_{0}^{r} f(t)dt \\
&= \int_{0}^{r} f(x)dx + \int_{0}^{r} f(t)dt \\
&= 2\int_{0}^{r} f(t)dt.
\end{aligned}$$

2. Sei $a \in \mathbb{R}$ fix. Dann gilt $(*)$

$$\int_{0}^{p} f(x)dx + \int_{p}^{a+p} f(x)dx = \int_{0}^{a+p} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{a+p} f(x)dx.$$

Mit $\phi : [0, a] \to [p, a + p], x \mapsto x + p$ ($\phi' = 1$) folgt $(**)$

$$\int_p^{a+p} f(x)dx = \int_{\phi(0)}^{\phi(a)} f(x)dx = \int_0^a f(\phi(x)) \cdot 1\, dx = \int_0^a f(x)dx$$

da $\phi(x + p) = \phi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Aus $(*)$ zusammen mit $(**)$ folgt

$$\int_0^p f(x)dx = \int_a^{a+p} f(x)dx.$$

---