Universität Paderborn Wintersemester 23/24
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Analysis für Informatiker

2. Hausaufgabenblatt - Lösungen

Hausaufgabe 2.1 Zeigen Sie den binomischen Lehrsatz:

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j}$$

für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ (Hinweis: Verwenden Sie Induktion über n).
Beweis:

Beweis per Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

I.A. ($n = 1$): Seien $x, y \in \mathbb{Q}$. Dann gilt

$$(x+y)^1 = 1 * x + 1 * y = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} y = \sum_{j=0}^{1} x^j y^{1-j}.$$

I.V.: Der binomische Lehrsatz gilt für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

I.S. ($n \mapsto n+1$): Für $x, y \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\
&= (x+y) \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j} \qquad (I.V.) \\
&= x \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j} + y \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{j+1} y^{n-j} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j+1} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} x^{(j-1)+1} y^{n-(j-1)} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n+1-j} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} x^j y^{n+1-j} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n+1-j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} x^j y^{n+1-j} + \binom{n}{n} x^{n+1} + \binom{n}{0} y^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n+1-j} \\
&= \binom{n+1}{0} y^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \left(\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} \right) x^j y^{n+1-j} + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} y^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n+1}{j} x^j y^{n+1-j} + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} \qquad \text{(Pascalsche Formel)} \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} x^j y^{n-j}.
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 2.2 Zeigen Sie

1. für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$.
2. für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0$.
3. für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j!} \prod_{i=0}^{j-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)\right).$$

   Berechnen Sie diesen Ausdruck für $n = 3$ zweimal: einmal mit Hilfe der Formel auf der linken Seite und einmal mit Hilfe der Formel auf der rechten Seite.

   (Hinweis: in ein paar Wochen wird in der Vorlesung gezeigt, dass sich die Zahl $(1+1/n)^n$ für große $n \in \mathbb{N}$ der eulerschen Konstante e beliebig nah annähert.)

Beweis: 1. folgt aus dem binomischen Lehrsatz mit $x = y = 1$ und 2. folgt ebenfalls aus dem binomischen Lehrsatz mit $x = -1, y = 1$. Für 3. sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{n} + 1\right)^n &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{1}{n^j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \frac{n!}{(n-j)!} \frac{1}{n^j} \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} \left(\prod_{i=0}^{j-1} (n-i) \right) \frac{1}{n^j} \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} \left(\prod_{i=0}^{j-1} \left(n\left(1 - \frac{i}{n}\right)\right)\right) \frac{1}{n^j} \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} \left(n^j \prod_{i=0}^{j-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)\right) \frac{1}{n^j} \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} \prod_{i=0}^{j-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right).
\end{aligned}$$

Für $n = 3$ ergibt sich auf der linken Seite $(1 + 1/3)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$. Die rechte Seite ergibt sich als

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{1}{1!}(1 - 0/3) + \frac{1}{2!}(1 - 0/2)(1 - 1/3) + \frac{1}{3!}(1 - 0/3)(1 - 1/3)(1 - 2/3) \\
&= 1 + 1 * 1 + \frac{1}{2} * 1 * \frac{2}{3} + \frac{1}{6} * 1 * \frac{2}{3} * \frac{1}{3} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{27} \\
&= \frac{54}{27} + \frac{9}{27} + \frac{1}{27} \\
&= \frac{64}{27}.
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 2.3 Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper und $x, y, v, w \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie folgende Aussagen

1. $x < y \iff -x > -y$
2. $x < y \wedge z > 0 \Rightarrow xz < yz$
3. $x < y \wedge z < 0 \Rightarrow xz > yz$
4. $x > 1 \iff 0 < x^{-1} < 1$
5. $x < v, y < w \Rightarrow x + y < v + w$.

Beweis:
Sei $P \subset \mathbb{K} \setminus \{0\}$ die Menge der positiven Elemente des angeordneten Körpers $\mathbb{K}$.
1. Es gilt

$$\begin{aligned} x < y &\iff y - x \in P \\ &\iff -x - (-y) \in P \qquad \text{(Präsenzaufgabe 1.3 1.)} \\ &\iff -y < -x \\ &\iff -x > -y. \end{aligned}$$

2. Es gilt

$$\begin{aligned} x < y \wedge z > 0 &\iff y - x \in P \wedge z > 0 \\ &\implies (y - x)z \in P \qquad \text{(da } P \cdot P \subset P \text{ in einem angeordneten Körper gilt)} \\ &\iff yz - xz \in P \\ &\iff xz < yz. \end{aligned}$$

3. Es gilt

$$\begin{aligned} x < y \wedge z < 0 &\iff x < y \wedge -z > 0 \qquad \text{(nach 1. und } -0 = 0) \\ &\implies x(-z) < y(-z) \qquad \text{(nach 2.)} \\ &\iff -xz < -yz \qquad \text{(Präsenzaufgabe 1.3.4.)} \\ &\iff xz > yz \qquad \text{(nach 1.).} \end{aligned}$$

4. Sei $x > 0$. Angenommen es gilt $1/x < 0$. Da $P(-P) \subseteq -P$ (siehe VL) folgt $1 = x * \frac{1}{x} < 0$, aber $1 > 0$ (siehe VL). Demnach ist $x^{-1} > 0$ und wir haben gezeigt $x > 0 \implies 1/x > 0$. Wegen $(x^{-1})^{-1} = x$ gilt

$$x > 0 \iff x^{-1} > 0.$$

Ist nun $x > 1$ so folgt $x > 0$, da aus $x - 1 \in P$ die Aussage $x = x - 1 + 1 \in P + P \subseteq P$ folgt (Definition angeordneter Körper). Also gilt für $x > 1$ immer auch $x > 0$ und $0 < 1/x$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} x > 1 &\iff x - 1 > 0 \\ &\iff \frac{1}{x}(x - 1) > 0 \qquad (x > 0, 1/x > 0, P \cdot P \subseteq P) \\ &\iff 1 - \frac{1}{x} > 0 \\ &\iff 1 > 1/x \end{aligned}$$

und insgesamt

$$x > 1 \iff x > 1 \wedge x > 0 \iff 1 > 1/x \wedge 1/x > 0 \iff 0 < 1/x < 1.$$

4. Es gilt

$$\begin{aligned}
x < v, y < w &\iff v - x \in P \wedge w - y \in P \\
&\implies (v-x) + (w-y) \in P \qquad \text{(da } P + P \subset P \text{ in einem angeordneten Körper gilt)} \\
&\iff v + w - (x+y) \in P \\
&\iff x + y < v + w.
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 2.4 Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{Q}$ mit $x > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die Ungleichung

$$(1+x)^n > \binom{n}{2} x^2 \geq \frac{n^2}{4} x^2$$

gilt. (Hinweis: Benutzen Sie den binomischen Lehrsatz und die Annahmem $x > 0$ für die erste Ungleichung und die Annahme $n \geq 2$ für die zweite Ungleichung.)

Beweis:

Sei $x \in \mathbb{Q}$ mit $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Dann folgt mit dem binomischen Lehrsatz

$$(1+x)^n = (x+1)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j = \binom{n}{2} x^2 + \sum_{j=0, j\neq 2}^{n} \binom{n}{j} x^j > \binom{n}{2} x^2$$

da wegen $x > 0$ für die Summe $\sum_{j=0,j\neq 2}^{n} \binom{n}{j} x^j > 1 > 0$ gilt. Für die zweite Ungleichung reicht es $\binom{n}{2} \geq \frac{n^2}{4}$ zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\binom{n}{2} \geq \frac{n^2}{4} &\iff \frac{n!}{2!(n-2)!} \geq \frac{n^2}{4} \\
&\iff \frac{1}{2} n(n-1) \geq \frac{n^2}{4} \\
&\iff 2(n-1) \geq n \\
&\iff n - 2 \geq 0 \\
&\iff n \geq 2
\end{aligned}$$

was unserer Annahme an n entspricht.

Abgabe der Hausaufgaben bis zum Sonntag den 05.11.2023, 23.59 Uhr in Panda.