Universität Paderborn Wintersemester 23/24
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Analysis für Informatiker

2. Präsenzübungsblatt

Präsenzaufgabe 2.1

1. Finden Sie Zahlen $N \in \mathbb{N}_0$, $c_0, \dots, c_N \in \{0, \dots, b-1\}$, sodass
$$1000 = c_0 + c_1 b + \cdots + c_N b^N$$
für (i) $b = 2$ (ii) $b = 3$ (iii) $b = 10$.

   Lösung:
   $b = 10 : N = 3, c_3 = 1, c_i = 0$ für $i \neq 3$.

   $b = 2 : N = 9$ und

   $1000 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^9.$

   $b = 3 : N = 6$ und
$$1000 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^5 + 1 \cdot 3^6.$$

2. Sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b > 1$ und $\{c_i : i \in \mathbb{N}_0\}$ natürliche Zahlen mit $0 \leq c_i \leq b-1$. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$
$$\sum_{i=0}^{n} c_i b^i \leq b^{n+1} - 1$$
gilt.

   Beweis: Es gilt
$$\sum_{i=0}^{n} c_i b^i \leq \sum_{i=0}^{n} (b-1) b^i = \left(\sum_{i=0}^{n} b^{i+1}\right) - \left(\sum_{i=0}^{n} b^i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n+1} b^i\right) - \left(\sum_{i=0}^{n} b^i\right) = b^{n+1} - 1.$$

3. Sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b > 1$. Zeigen Sie, dass jede Zahl $x \in \mathbb{N}_0$ eine eindeutige Darstellung der Form
$$x = \sum_{i=0}^{N} c_i b^i = c_0 + c_1 b + \cdots + c_N b^N$$
mit einem $N \in \mathbb{N}_0$ und $c_i \in \{0, \dots, b-1\}$ für alle $i \in \{0, \dots, N\}$ besitzt.

   Beweis: *Existenz:* Sei $n = \max\{i \in \mathbb{N}_0 : b^i \leq x\}$ und sei $c_n = \max\{c \in \mathbb{N} : cb^n \leq x\}$. Es gilt $x_n := x - c_n b^n < b^n$, da $x_n < (c_n + 1) b^n$ per Definition von c_n. Für $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq n-1$ definiere rekursiv $c_i := \max\{c \in \mathbb{N}_0 : cb^i \leq x_{i+1}\}$ und $x_i = x_{i+1} - c_i b^i$. Bemerke, dass $0 \leq c_i \leq b-1$ und $x_0 = 0$. Es gilt
$$x = c_n b^n + x_n = c_n b^n + c_{n-1} b^{n-1} + x_{n-1} = \cdots = \sum_{i=0}^{n} c_i b^i + x_0 = \sum_{i=0}^{n} c_i b^i.$$

Eindeutigkeit: Sei $n \in \mathbb{N}$. Nehme an, dass x Darstellungen der Form $x = \sum_{i=0}^{n} c_i b^i$ und $x = \sum_{i=0}^{n} d_i b^i$ mit $c_i, d_i \in \{0, ..., b-1\}$ besitzt. Es gilt

$$\sum_{i=0}^{n} (c_i - d_i) b^i = 0.$$

Nehme an, dass es ein $i \in \mathbb{N}_0$ gibt mit $c_i \neq d_i$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass $c_n - d_n \neq 0$. Es gilt

$$b^n \leq |c_n - d_n| b^n = |(c_n - d_n) b^n| = \Big| - \sum_{i=0}^{n-1} (c_i - d_i) b^i \Big| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |c_i - d_i| b^i < b^n.$$

(Für die letzte Ungleichung haben wir die Tatsache, dass $0 \leq |c_i - d_i| \leq b-1$ und die Ungleichung in (a) verwendet.)

Widerspruch! Demnach gibt es ein derartiges $i \in \mathbb{N}_0$ nicht und die Darstellung ist eindeutig.

Präsenzaufgabe 2.2 Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper und $x, y \in \mathbb{K}$ mit $x + 1 > 0$ und $y + 1 > 0$. Zeigen Sie die Äquivalenz

$$x < y \iff \frac{1-x}{1+x} > \frac{1-y}{1+y}.$$

Beweis:

Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1-x}{1+x} > \frac{1-y}{1+y} &\iff (1-x)(1+y) > (1-y)(1+x) \qquad (1+x > 0, 1+y > 0, \text{HA } 2.3) \\
&\iff 1 + y - x - xy > 1 - y + x - xy \\
&\iff y - x > x - y \\
&\iff y + y > x + x \\
&\iff y > x. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Zu $(*)$: " $\Leftarrow$ " folgt aus HA 2.3.5. Für den Beweis von " $\Rightarrow$ " sei $y \not> x$ was äquivalent zu $y - x \in -P \cup \{0\}$. Nun gilt aber $y - x + y - x \in (-P \cup \{0\}) + (-P \cup \{0\}) \subseteq -P \cup \{0\}$, also $y + y \not> x + x$.

Präsenzaufgabe 2.3

1. Sei $x \in \mathbb{R}$ und

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

der Betrag von x. Zeigen Sie, dass $|x| = \sqrt{x^2}$ gilt.

Beweis:

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $x^2 \geq 0$. Per Definition der Wurzel ist $\sqrt{x^2}$ die eindeutige nicht negative reelle Zahl $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $y^2 = x^2$. Nun gilt

$$|x|^2 = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x \geq 0 \\ (-x)^2 & \text{falls } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x \geq 0 \\ x^2 & \text{falls } x < 0 \end{cases} = x^2.$$

2. Zeigen Sie, dass
$$\sqrt[7]{\frac{50^6}{5^{14}}\frac{5}{3^7}(\sqrt[7]{10}\,9)^7} = 6$$
gilt. **Rechnung:**

$$\begin{aligned}\sqrt[7]{\frac{50^6}{5^{14}}\frac{5}{3^7}(\sqrt[7]{10}\,9)^7} &= \sqrt[7]{\frac{50^6}{5^{14}}\frac{5}{3^7}10\cdot 9^7}\\ &= \sqrt[7]{\frac{50^7}{5^{14}}\cdot\left(\frac{9}{3}\right)^7}\\ &= \sqrt[7]{\left(\frac{50}{25}\right)^7\cdot\left(\frac{9}{3}\right)^7}\\ &= 6.\end{aligned}$$

Präsenzaufgabe 2.4 Bestimmen Sie falls existent Supremum, Infimum, Maximum und Minimum (in $\mathbb{R}$) folgender Teilmengen von $\mathbb{R}$:

1. $M_1 = \left\{(-1)^n \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$
2. $M_2 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$
3. $M_3 = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$
4. $M_4 = \left\{\frac{n}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$
5. $M_5 = \left\{\frac{m^2}{n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$

(Hinweis: Es darf benutzt werden, dass zwischen zwei unterschiedlichen reellen Zahlen immer eine rationale Zahl liegt.)

Lösung: 1. $\max M_1 = \sup M_1 = \frac{1}{2}$ und $\min M_1 = \inf M_1 = -1$.

2. $M_2 = \{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$. Damit gilt $\max M_2 = \sup M_2 = \sqrt{2}$ und $\min M_2 = \inf M_2 = -\sqrt{2}$.

3. $M_3 = \{x \in \mathbb{Q} : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$. In jedem Intervall der Form $(y, \sqrt{2}]$ mit $y \in \mathbb{R}, y < \sqrt{2}$ liegt eine rationale Zahl und somit gilt $\sup M_3 = \sqrt{2}$ (hier verwenden wir den Hinweis). Da $\sqrt{2}$ nicht rational ist kann M_3 kein Maximum besitzen, da ein existierendes Maximum immer mit dem Supremum übereinstimmt. Analog sieht man, dass M_3 kein Minimum besitzt und das Infimum durch $\inf M_3 = -\sqrt{2}$ gegeben ist.

4. Es gilt $M_4 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}\right\} \cup \left\{\frac{n}{2^n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 5\right\}$. Nun gilt
$$2^n > n^2 \qquad (*)$$
für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$. Für $n = 5$ ergibt sich $2^5 = 32 > 25 = 5^2$. Angenommen $(*)$ gilt für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$. Dann folgt
$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \geq 2 \cdot n^2$$

aber

$$\begin{aligned}
2 \cdot n^2 \geq (n+1)^2 &\iff 2 \cdot n^2 \geq n^2 + 2n + 1 \\
&\iff n^2 - 2n - 1 \geq 0 \\
&\iff (n-1)^2 \geq 2 \\
&\iff (n-1) \geq \sqrt{2} \\
&\iff n - 1 \geq 2 \\
&\iff n \geq 3.
\end{aligned}$$

Da per Annahme $n \geq 5$ gilt, folgt $(*)$ auch für $n+1$ und $(*)$ ist bewiesen. Somit folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$:

$$\frac{n}{2^n} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Damit ergibt sich $\max M_4 = \sup M_4 = \frac{1}{2}$. Da $0 \notin M_4$ und da $M_4 \subset \mathbb{R}_{>0}$ gilt, folgt aus $(*)$ auch, dass M_4 kein Minimum besitzt aber das Infimum durch $\inf M_4 = 0$ gegeben ist.

5. M_5 ist nicht beschränkt, denn ist $n \in \mathbb{N}$ so gilt $n = \frac{n^2}{n} \in M_5$, also $\mathbb{N} \subseteq M_5$. Damit besitzt M_5 weder Maximum noch Supremum. Wegen $\frac{1}{n} \in M_5$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $[0, y) \cap M_5 \neq \emptyset$ für alle $y > 0$. Da zusätzlich $M_5 \subset \mathbb{R}_{>0}$ gilt, ist das Infimum gegeben durch $\inf M_5 = 0$. Da $0 \notin M_5$ besitzt M_5 kein Minimum.
