Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

# Analysis für Informatiker

## 3. Hausaufgabenblatt - Lösungen

**Hausaufgabe 3.1** Sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b > 1$ Nach Präsenzaufgabe 2.1.3, besitzt jede Zahl $x \in \mathbb{N}_0$ eine eindeutige Darstellung der Form

$$x = \sum_{i=0}^{N} c_i b^i = c_0 + c_1 b + \cdots + c_N b^N$$

mit einem $N \in \mathbb{N}_0$ und $c_i \in \{0, \ldots, b-1\}$ für alle $i \in \{0, \ldots, N\}$. Finden Sie diese Darstellungen für die (Dezimal-) Zahlen $x = 7$ und $x = 579$ für

1. $b = 2$
2. $b = 3$
3. $b = 5$.

**Lösung:**

$b = 2:$

$7 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2.$
$507 = 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0.$

$b = 3:$

$7 = 1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1$

$579 = 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^5$

$b = 5:$

$7 = 2 \cdot 5^0 + 1 \cdot 5^1$

$579 = 4 \cdot 5^0 + 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^3.$

**Hausaufgabe 3.2** Bestimmen Sie falls existent Supremum, Infimum, Maximum und Minimum (in $\mathbb{R}$) der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$.

1. $M_1 = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}, n < 0, m \leq -n\}$
2. $M_2 = \left\{\frac{1}{n^3} : n \in \mathbb{N}\right\}$
3. $M_3 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 2, x > 0\}$
4. $M_4 = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \geq 2, x > 0\}$

(Hinweis: Es darf benutzt werden, dass zwischen zwei unterschiedlichen reellen Zahlen immer eine rationale Zahl liegt.)

**Beweis:**

1. Es gilt $M_1 \subset \mathbb{R}_{<0}$. Nun gilt $-\frac{1}{n} = \frac{1}{-n} \in M_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da $1 \leq -(-n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wegen $\sup \{-1/n : n \in \mathbb{N}\} = 0$ folgt

$$0 = \sup \{-1/n : n \in \mathbb{N}\} \leq \sup M_1 \leq 0,$$

also $\sup M_1 = 0$. Da $0 \notin M_1$ besitzt $M_1$ kein Maximum. Ist $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$ mit $n < 0$ und $m \leq -n$ so folgt $\frac{m}{-n} \leq 1$ was äquivalent zu $-1 \leq \frac{m}{n}$ ist. Wegen $-1 = \frac{1}{-1} \in M_1$ existiert das Minimum von $M_2$ und ist gleich $-1$. Damit ist das Infimum ebenfalls gegeben durch $-1$.

2. Es gilt $\max M_2 = \sup M_2 = 1 = \frac{1}{1^2}$, da $\frac{1}{n^2} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$. Es gilt $1/n^2 > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und ist $y > 0$ so gilt für $m \in \mathbb{N}$ mit $m^2 > 1/y$ auch $1/m^2 < y$. Dementsprechend ist $\inf M_2 = 0$ und da $0 \notin M_2$ existiert kein Minimum in $M_2$.

3. $M_3 = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq \sqrt{2}\}$. Damit folgt $\inf M_3 = 0$. Da $0 \notin M_3$ besitzt $M_3$ kein Minimum. Zudem ergibt sich $\max M_3 = \sqrt{2}$, da $\sqrt{2} \in M_3$ und somit auch $\sup M_3 = \sqrt{2}$.

4. $M_3 = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x \leq \sqrt{2}\}$. Damit folgt mit $1/n \in M_4$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\inf \{1/n : n \in \mathbb{N}\} = 0$, dass $0 = \inf \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \leq \inf M_3 \leq 0$, also $\inf M_3 = 0$. Zwischen zwei unterschiedlichen reellen Zahlen liegt immer eine rationale Zahl, also folgt $\sup(M_4) = \sqrt{2}$. Da $\sqrt{2}$ nicht rational ist, besitzt $M_4$ kein Maximum.

**Hausaufgabe 3.3 (Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel)**

Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt

$$\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right)^n \geq \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

Hinweis: Benutzen Sie vollständige Induktion. Für den Induktionsschritt kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $x_{n+1} \geq x_i$ für $i = 1, \ldots n$ und dass alle $x_i$ ungleich Null sind. Zeige mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung

$$\left( \frac{\sum_{i=1}^{n+1} x_i}{(n+1)x_a} \right)^{n+1} = \left( 1 + \frac{x_{n+1} - x_a}{(n+1)x_a} \right)^{n+1} \geq \frac{x_{n+1}}{x_a},$$

wobei $x_a$ das aritmetische Mittel $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ ist. Zeige anschließend, dass

$$\left( \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} x_i \right)^{n+1} \geq \prod_{i=1}^{n+1} x_i.$$

**Beweis:**

Für $n = 1$ ist die Aussage trivial. Nehme an, dass $n \in \mathbb{N}$ und dass die Ungleichung gilt für alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Seien jetzt $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir nach umordnen der $x_i$'s annehmen, dass $x_{n+1} \geq x_i$ für $i = 1, \ldots n$. Da die Behauptung trivial ist, falls auch nur eines der $x_i = 0$ ist, da dann die rechte Seite Null ergibt, können wir $x_i > 0$ für alle $i$ annehmen. Sei $x_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$. Bemerke, dass $x_{n+1} \geq x_a > 0$. Es gilt

$$\left( \frac{\sum_{i=1}^{n+1} x_i}{(n+1)x_a} \right)^{n+1} = \left( \frac{n x_a + x_{n+1}}{(n+1)x_a} \right)^{n+1} = \left( 1 + \frac{x_{n+1} - x_a}{(n+1)x_a} \right)^{n+1}.$$

Nach der Bernoullische Ungleichung gilt

$$\left(1+\frac{x_{n+1}-x_a}{(n+1)x_a}\right)^{n+1} \geq (n+1)\frac{x_{n+1}}{(n+1)x_a} = \frac{x_{n+1}}{x_a}.$$

Jetzt gilt

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1} x_i}{(n+1)x_a}\right)^{n+1} \geq \frac{x_{n+1}}{x_a}$$

und damit

$$\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)^{n+1} = x_a^{n+1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1} x_i}{(n+1)x_a}\right)^{n+1} \geq x_a^{n+1}\frac{x_{n+1}}{x_a} = x_a^n x_{n+1}$$

Nach der Voraussetzung gilt $x_a^n \geq \prod_{i=1}^n x_i$. Darum folgt

$$\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)^{n+1} \geq \prod_{i=1}^{n+1} x_i.$$

**Hausaufgabe 3.4** Zeigen Sie die folgenden Identitäten in $\mathbb{R}$.

1. $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}\right)^{48} = 8$
2. $\sqrt[9]{\sum_{j=0}^{18}\binom{18}{j}2^j} = 9$
3. $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{216}}+\left(\frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[2]{25}}\right)^{-1}\right)^2} = 1$
4. $\left(\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^j\right)^2 = \frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{3}{2}-\sqrt{2}}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

**Lösung**

1. $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}\right)^{48} = \left(2^{\frac{1}{2^4}}\right)^{48} = 2^{\frac{48}{16}} = 2^3 = 8.$

2. $\sqrt[9]{\sum_{j=0}^{18}\binom{18}{j}2^j} = \sqrt[9]{(1+2)^{18}} = \sqrt[9]{3^{18}} = 3^{\frac{18}{9}} = 3^2 = 9.$ (binomischer Lehrsatz)

3. $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{216}}+\left(\frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[2]{25}}\right)^{-1}\right)^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{1+5}{\sqrt[3]{216}}\right)^2} = \sqrt[3]{1^2} = 1.$

4. Zuerst stellen wir fest, dass für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{j=0}^{n} x^j = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

gilt. Das folgt aus folgender Äquivalenzumformung

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} x^j = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} &\iff (1-x)\sum_{j=0}^{n} x^j = 1-x^{n+1}\\ &\iff \sum_{j=0}^{n} x^j - \sum_{j=0}^{n} x^{j+1} = 1-x^{n+1}\\ &\iff \sum_{j=0}^{n} x^j - \sum_{j=1}^{n+1} x^j = 1-x^{n+1}.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^j\right)^2 &= \left(\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^2\\ &= \frac{1-2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}+\frac{1}{2^{n+1}}}{1-2\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{3}{2}-\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

---

Abgabe der Hausaufgaben bis zum Sonntag den 12.11.2023, 23.59 Uhr in Panda.