Universität Paderborn Wintersemester 23/24
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Analysis für Informatiker

3. Präsenzübungsblatt - Lösungen

Präsenzaufgabe 3.1 Berechnen Sie die Normalform $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ der folgenden komplexen Zahlen:

1. $(2 + 3i) + (1 - \frac{1}{2}i) - (\sqrt{2} - \sqrt{3}i)$
2. $\left(-3 + \frac{5}{4}i\right)\left(\frac{1}{2} - 7i\right)$
3. $\frac{1}{2+3i}$
4. $\frac{-3+\sqrt{2}i}{2+3i}$.

Lösung:

1.
$$(2+3i)+\left(1-\frac{1}{2}i\right)-(\sqrt{2}-\sqrt{3}i) = (2+1-\sqrt{2})+\left(3-\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)i = (3-\sqrt{2})+\left(\frac{5}{2}+\sqrt{3}\right)i.$$

2.
$$\begin{aligned}\left(-3+\frac{5}{4}i\right)\left(\frac{1}{2}-7i\right) &= (-3)\frac{1}{2}+3\cdot 7i+\frac{5}{4}\frac{1}{2}i-\frac{5}{4}7\,i^2\\ &= (-3)\frac{1}{2}+3\cdot 7i+\frac{5}{4}\frac{1}{2}i+\frac{5}{4}7\\ &= \left(\frac{5}{4}7-\frac{3}{2}\right)+\left(21+\frac{5}{8}\right)i\\ &= \frac{29}{4}+\left(21+\frac{5}{8}\right)i\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}\frac{1}{2+3i} &= \frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)}\\ &= \frac{2-3i}{2^2-(3i)^2}\\ &= \frac{2-3i}{4+9}\\ &= \frac{2}{13}-\frac{3}{13}i.\end{aligned}$$

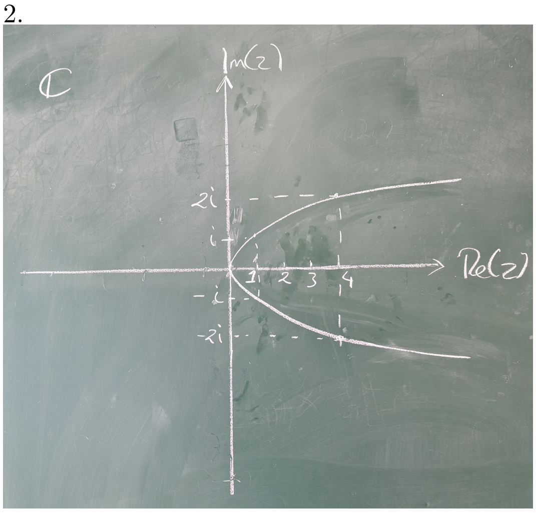
4.
$$\begin{aligned}\frac{-3+\sqrt{2}i}{2+3i} &= (-3+\sqrt{2}i)\frac{1}{2+3i}\\ &= (-3+\sqrt{2}i)\left(\frac{2}{13}-\frac{3}{13}i\right) \qquad (3.)\\ &= \left((-3)\frac{2}{13}-\sqrt{2}\left(-\frac{3}{13}\right)\right)+\left((-3)\left(-\frac{3}{13}\right)+\sqrt{2}\frac{2}{13}\right)i\\ &= \frac{-6+3\sqrt{2}}{13}+\frac{9+2\sqrt{2}}{13}i.\end{aligned}$$

Präsenzaufgabe 3.2 Skizzieren Sie die folgen Teilmengen der komplexen Zahlen

1. $\mathbb{R}(1+2i) = \{z \in \mathbb{C} : z = \alpha(1+2i) \text{ für ein } \alpha \in \mathbb{R}\}$
2. $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z)^2 = \operatorname{Re}(z)\}$
3. $\left\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1, -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(z) \leq \frac{1}{2}\right\}$
4. $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \left\{z \in \mathbb{C} : j \leq |z| \leq j + \frac{1}{j+1}\right\}$

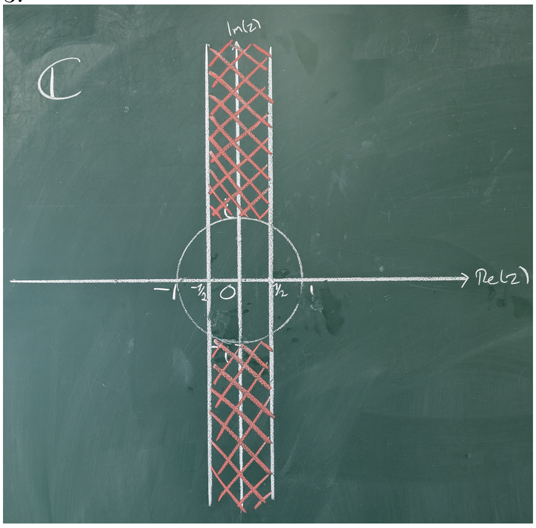
Lösung: 1.

2.



(Hinweis: schreibt man $x = \Re(z)$ und $y = \operatorname{Im}(z)$ so ergibt sich die Gleichung $y^2 = x$, also eine übliche Normalparabel mit vertauschten Rollen von x und y.)

3.



4.

Präsenzaufgabe 3.3

1. Finden Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^8 = 1$.
2. Bestimmen Sie die komplexen Lösungen der Gleichung $z^2 = c$ für $c \in \mathbb{R}$ mit $c < 0$.
3. Sei $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $b^2 - 4ac < 0$. Bestimmen Sie die komplexen Lösungen der Gleichung $az^2 + bz + c = 0$.

Lösung:

(Bemerkung: Eine polynomiale Gleichung n-ten Grades besitzt höchstens n verschiedene komplexe Lösungen ($n \in \mathbb{N}$).)

1. Es gilt

$$\begin{aligned} z^8 = 1 &\iff (z^4)^2 = 1 \\ &\iff z^4 = \pm 1 \\ &\iff z^2 = \pm 1 \vee z^2 = \pm i \\ &\iff z = \pm 1 \vee z = \pm i \vee z = \pm \frac{1+i}{|1+i|} \vee z = \pm i \frac{1+i}{|1+i|}. \end{aligned}$$

2. Ist $c < 0$ so kennen wir die beiden Lösungen der Gleichung $z^2 = -c$, nämlich $\pm\sqrt{-c}$. Dann gilt

$$(\pm i\sqrt{-c})^2 = (-1)^2 i^2 \sqrt{-c}^2 = 1 \cdot (-1)(-c) = c,$$

also sind die beiden Lösungen gegeben durch $\pm i\sqrt{-c}$.

3. Es gilt

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\iff a\left(z^2 + \frac{b}{a}z\right) + c = 0 \\ &\iff a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = 0 \qquad \text{(binomische Formel)} \\ &\iff 4a^2\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - b^2 + 4ac = 0 \qquad | \cdot 4a \ (a \neq 0) \\ &\iff \left(2a\left(z + \frac{b}{2a}\right)\right)^2 = b^2 - 4ac \\ &\iff 2a\left(z + \frac{b}{2a}\right) = \pm i\sqrt{-(b^2 - 4ac)} \qquad (b^2 - 4ac < 0 \ + \textit{PA 3.3.2 Lösung}) \\ &\iff z = \frac{-b \pm i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a}. \end{aligned}$$

Präsenzaufgabe 3.4 Untersuchen die folgende Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

1. $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$
2. $f_2 : \mathbb{R} \mapsto \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}, x \mapsto x^2$
3. $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$
4. $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$, wobei $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ für $x \in \mathbb{R}$.
5. $f_4 : [0, 1) \to \mathbb{R}, x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$, wobei $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Lösung:

1. f_1 ist nicht surjektiv und damit auch nicht bijektiv, da $f(n) \neq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und f_1 ist injektiv, da aus $n + 1 = f(n) = f(m) = m + 1$ die Gleichung $n = m$ folgt.

2. f_2 ist nicht injektiv und damit auch nicht bijektiv, da $f_2(-x) = f_2(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, aber für $x \neq 0$ ist $x \neq -x$.

f_2 ist surjektiv, da für jedes $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 0$ eine nichtnegative zweite-Wurzel $\sqrt{y}$ in $\mathbb{R}$ existiert, d.h. es gilt $f_2(\sqrt{y}) = y$.

3. Es gilt $f_3(y) \geq 0$ für $y \geq 0$ und $f_3(y) < 0$ für $y < 0$. Demnach folgt $f_3(x) \neq f_3(y)$ für alle $x \geq 0$ und $y < 0$. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ nicht negativ mit $x^3 = y^3$. Dann folgt $x = y$ aus der Eindeutigkeit der nichtgenativen (n-ten) Wurzel einer nichtnegativen reellen Zahl. Sind x, y beide < 0 und gilt $x^3 = y^3$, so folgt auch $(-x)^3 = -(x^3) = -(y)^3 = (-y)^3$, also nach dem zuvor gezeigten $-x = -y$ was äquivalent zu $x = y$ ist.

f_3 ist surjektiv, denn ist $y \geq 0$, so existiert eine nichtnegative 3-te Wurzel $\sqrt[3]{y}$ in $\mathbb{R}$, d.h. $f_3(\sqrt[3]{y}) = y^3$. Ist $y < 0$ so existiert nach nach dem eben gezeigten ein $x \in \mathbb{R}$ (und zwar $x = \sqrt[3]{-y})$) mit $x^3 = -y$, also folgt $f_3(-x) = (-x)^3 = (-1)^3(x)^3 = -(-y) = y$, also ist f_3 surjektiv.

Da f_3 sowohl injektiv, als auch surjektiv ist, ist f_3 per Definition bijektiv.

4. Es gilt $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\} \leq x$, was äquivalent zu $f_4(x) \geq 0$ ist. Demnach ist f_3 nicht surjektiv, also auch nicht bijektiv. Es gilt zum Beispiel $f_4(0) = f_4(1) = 0$, also ist f_4 auch nicht injektiv.

5. f_5 ist ebenfalls nicht surjektiv (also auch nicht bijektiv), da f_4 bereits nicht surjektiv ist. Aber f_5 ist injektiv, denn für alle $x \in [0, 1)$ gilt $\lfloor x \rfloor = 0$, womit $f_5(x) = x$ für alle $x \in [0, 1)$ folgt. Die Abbildung $x \mapsto x$ ist aber sogar injektiv auf $\mathbb{R}$, also ist f_5 injektiv.

(Hinweis: Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann kann die Ungleichung $x \geq \lfloor x \rfloor + 1$ **nicht** gelten, denn $\lfloor x \rfloor$ ist per Definition die größte ganze Zahl mit $x \geq \lfloor x \rfloor$, aber $\lfloor x \rfloor + 1$ ist ebenfalls eine ganze Zahl. Demnach gilt $x < \lfloor x \rfloor + 1$ was äquivalent zu $f_4(x) < 1$ ist.

Zusammen mit $f_5(x) = x$ für alle $x \in [0, 1)$ ergibt sich, dass das Bild von f_4 und von f_5 gegeben ist durch $[0, 1)$.)

Präsenzaufgabe 3.5 Sei $\emptyset \neq X$ eine Menge.

1. Geben Sie eine Injektion $f : X \to P(X)$ an.

   Lösung: Die Abbildung $f : X \to P(X), x \mapsto \{x\}$ ist offensichtlich injektiv.

2. Zeigen Sie, dass **keine** Surjektion
$$f : X \to P(X)$$
   von X in die Potenzmenge von X existiert.

   (Hinweis: Zeigen Sie, dass für eine Abbildung $f : X \to P(X)$ die Menge $X' = \{x \in X : x \notin f(x)\}$ nicht im Bild von f liegt).
   Beweis: Sei $f : X \to P(X)$ eine Abbildung und $X' := \{x \in X : x \notin f(x)\}$. Wir zeigen
$$f(x) \neq X'$$
   für jedes $x \in X$, was äquivalent dazu ist, dass X' **nicht** im Bild von f liegt.

   1. Fall: $x \in X'$. Dann gilt $x \notin f(x)$. Damit muss also $f(x) \neq X'$ gelten, da in X' ein Element liegt (nämlich x) welches nicht in $f(x)$ liegt.

2. Fall: $x \notin X'$. Dann gilt $x \in f(x)$. Dann liegt x in $f(x)$ aber nicht in X' und demnach ist ebenfalls $f(x) \neq X'$.

Demnach haben wir ein Element von $P(X)$ gefunden (und zwar X'), welches nicht im Bild von f liegt, also ist f nicht surjektiv.
