Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

Analysis für Informatiker

4. Hausaufgabenblatt - Lösungen

Hausaufgabe 4.1 Berechnen Sie die **Normalform** $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ der folgenden komplexen Zahlen:

1. $(2 - i)(2 + i)$
2. $\left((5 - 2i) + (1 - \frac{1}{2}i)\right) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3}i)$
3. $\frac{-4+\sqrt{3}i}{7+i}$
4. $\left(\frac{2i}{-2+5i}\right)^2$.

Lösung:

1. $(2 - i)(2 + i) = 2^2 - (i)^2 = 4 - (-1) = 5.$

2.

$$\begin{aligned}\left((5-2i) + \left(1 - \frac{1}{2}i\right)\right) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3}i) &= \left(6 - \frac{5}{2}i\right) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3}i) \\ &= \left(6\sqrt{2} - \left(-\frac{5}{2}\right)(-\sqrt{3})\right) + \left((-6\sqrt{3}) - \frac{5}{2}\sqrt{2}\right) i \\ &= \left(6\sqrt{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}\right) - \left(6\sqrt{3} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) i\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\frac{-4+\sqrt{3}i}{7+i} &= \frac{(-4+\sqrt{3}i)(7-i)}{(7+i)(7-i)} \\ &= \frac{(-4+\sqrt{3}i)(7-i)}{7^2 - (-i)^2} \\ &= \frac{(-4+\sqrt{3}i)(7-i)}{50} \\ &= \frac{((-4)7 - \sqrt{3}(-1)) + ((-4)(-1) + \sqrt{3}\,7)i}{50} \\ &= \frac{-28+\sqrt{3}}{50} + \frac{4+7\sqrt{3}}{50} i\end{aligned}$$

4.

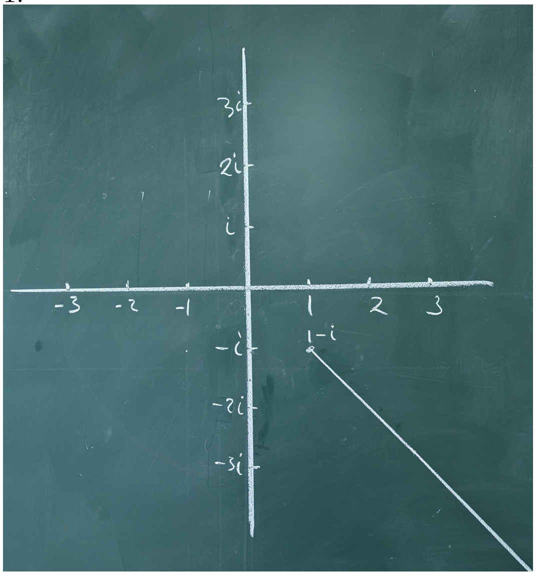
$$\begin{aligned}
\left(\frac{2i}{-2+5i}\right)^2 &= \frac{(2i)^2}{(-2+5i)^2} \\
&= \frac{-4}{((-2)^2-5^2)+2(-2)\,5i} \\
&= \frac{-4}{-21-20i} \\
&= \frac{4}{21+20i} \\
&= \frac{4(21-20\,i)}{(21+20i)(21-20i)} \\
&= \frac{84}{841}+\frac{80}{841}i.
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 4.2 Skizzieren Sie die folgen Teilmengen der komplexen Zahlen:

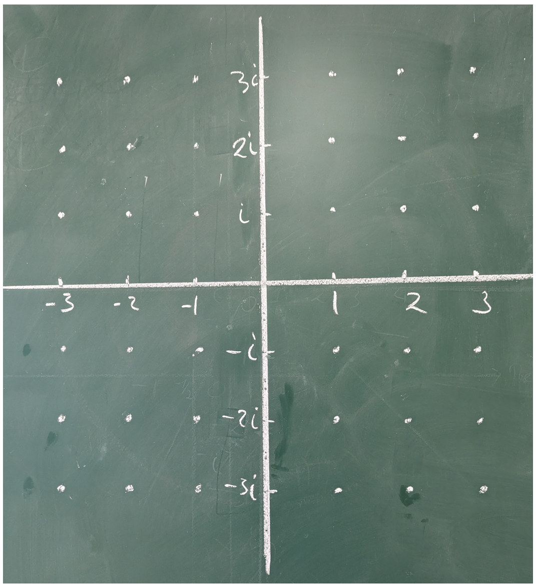
1. $\{z \in \mathbb{C} : z = \alpha(1-i) \text{ für ein } \alpha \in \mathbb{R} \text{ mit } \alpha \geq 1\}$
2. $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z} = \{n + mi : n, m \in \mathbb{Z}\}$
3. $\{z \in \mathbb{C} : -\mathrm{Im}(z)^2 - 4\mathrm{Im}(z) - 5 = \mathrm{Re}(z)\}$
4. $\{z \in \mathbb{C} : |z|^2 \leq 4\}$
5. $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left\{z \in \mathbb{C} : |z - 2n| \leq \frac{1}{|n|+1}\right\}$

Lösung:

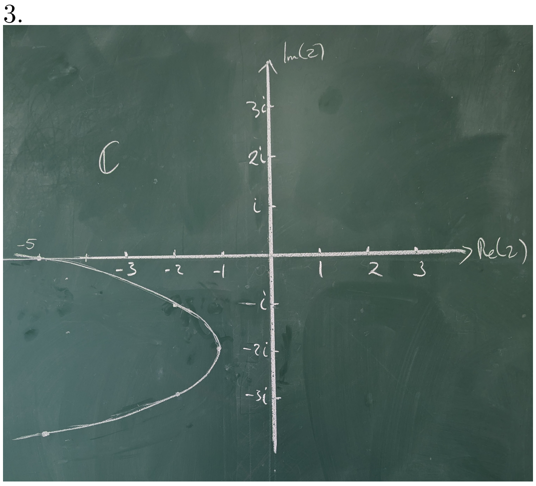
1.



2.

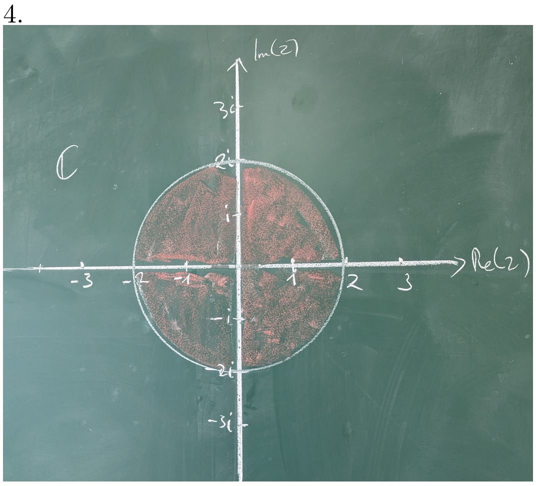


3.

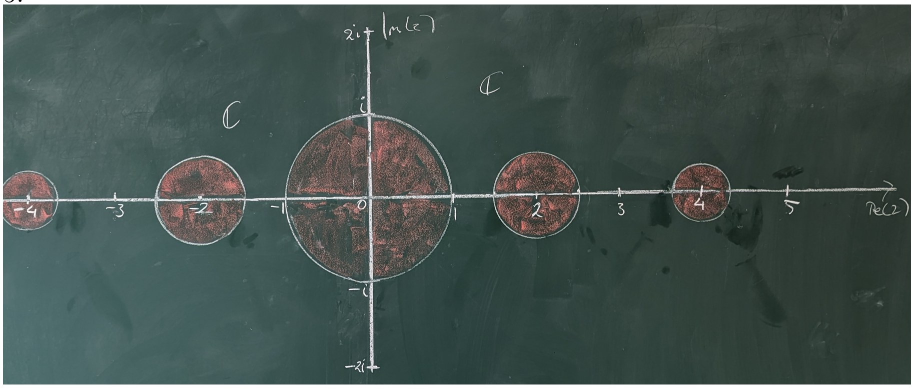


(Hinweis: schreibt man $x = \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$ so ergibt sich die Gleichung $-(y^2) - 4y - 5 = x$, welche äquivalent zu $-(y+2)^2 - 1 = x$ ist.)

4.



5.



Hausaufgabe 4.3 Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc \neq 0$. Zeigen Sie:

1. $cz + d \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}(z) > 0$.
2. Ist $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}(z) > 0$ so gilt

$$\mathrm{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) > 0 \iff ad - bc > 0.$$

Beweis:

1. Angenommen es gilt $cz + d = 0$ für ein $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}(z) > 0$. Ist $c \neq 0$, so folgt $z = -\frac{d}{c}$. Da $c, d \in \mathbb{R}$, folgt $-\frac{d}{c} = z \in \mathbb{R}$ was äquivalent zu $\mathrm{Im}(z) = 0$ ist - Widerspruch! Ist $c = 0$ so folgt $d \neq 0$, denn aufgrund von $ad - bc \neq 0$ muss $c \neq 0$ oder $d \neq 0$ gelten.

2. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $cz + d \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) &= \mathrm{Im}\left(\frac{(az+b)\overline{(cz+d)}}{(cz+d)\overline{(cz+d)}}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{(az+b)\overline{(cz+d)}}{|cz+d|^2}\right) \\
&= \frac{1}{|cz+d|^2}\mathrm{Im}((az+b)\overline{(cz+d)}) \qquad (|(cz+d)|^2 \in \mathbb{R}) \\
&= \frac{1}{|cz+d|^2}\mathrm{Im}((az+b)(c\overline{z}+d)) \qquad (c, d \in \mathbb{R}) \\
&= \frac{1}{|cz+d|^2}\mathrm{Im}(acz\overline{z}+adz+bc\overline{z}+bd) \qquad (c, d \in \mathbb{R}) \\
&= \frac{1}{|cz+d|^2}\mathrm{Im}(adz+bc\overline{z}) \qquad (a, b, c, d, z\overline{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}) \\
&= \frac{1}{|cz+d|^2}(ad\mathrm{Im}(z)+bc\mathrm{Im}(\overline{z})) \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{R}) \\
&= \frac{1}{|cz+d|^2}(ad\mathrm{Im}(z)-bc\mathrm{Im}(z)) \\
&= \frac{ad-bc}{|cz+d|^2}\mathrm{Im}(z).
\end{aligned}$$

Sei nun $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}(z) > 0$. Dann gilt nach 1. $cz + d \neq 0$ und damit $|cz + d|^2 > 0$ und demnach

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) > 0 \iff & \frac{ad-bc}{|cz+d|^2}\mathrm{Im}(z) > 0 \\ = ad - bc > 0 & \qquad \left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2} > 0\right).\end{aligned}$$

Hausaufgabe 4.4 Sei X, Y nicht leere **endliche** Mengen mit $|X| = |Y|$ und

$f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenzen

$$f \text{ bijektiv} \iff f \text{ injektiv} \iff f \text{ surjektiv}.$$

Beweis: Per Definition gilt

$$f \text{ bijektiv} \iff f \text{ injektiv} \wedge f \text{ surjektiv}.$$

Es genügt also die Äquivalenz

$$f \text{ injektiv} \iff f \text{ surjektiv}$$

zu zeigen.

Sei

$$f(X) := \{y \in Y : \exists x \in X : y = f(x)\}$$

das **Bild** von f. Per Definition von Abbildungen und unserer Bedingung $|X| = n$ gilt $|f(X)| \leq n$. Andererseits if f genau dann injektiv, wenn $|f(X)| \geq n$, da $|X| = n$. Damit ergibt sich also, dass f injektiv ist genau dann wenn $|f(X)| = n$. Die Abbildung f ist surjektiv genau dann wenn $Y = f(X)$, was genau dann der Fall ist, wenn $|Y| = |f(X)|$ (da Y endlich ist). Aber $|Y| = n$ womit sich insgesamt ergibt

$$f \text{ injektiv} \iff |f(X)| = n = |Y| \iff f(X) = Y \iff f \text{ surjektiv}.$$

Warnung: Die Aussage ist falsch für unendliche Mengen: Sei $X = Y = \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$. Dann ist f injektiv aber nicht surjektiv ($1 \notin f(\mathbb{N})$) und demnach auch nicht bijektiv.

Abgabe der Hausaufgaben bis zum Sonntag den 19.11.2023, 23.59 Uhr in Panda.