Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

Analysis für Informatiker

4. Präsenzübungsblatt - Lösungen

Präsenzaufgabe 4.1 Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen. Beweisen oder widerlegen Sie:

1. $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow$ g injektiv
2. $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow$ f injektiv
3. $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow$ f surjektiv
4. $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow$ g surjektiv

Beweis:

1. Nicht wahr: Sei $f : \{1\} \to \{1, 2\}$ mit $f(1) = 1$ und $g : \{1, 2\} \to \{1, 2\}$ mit $g(1) = g(2) = 1$. Dann ist $g \circ f : \{1\} \to \{1, 2\}$ trivialerweise injektiv, aber g ist nicht injektiv.

2. Wahr: Wir beweisen die Negation: Sei f nicht injektiv. Dann existieren $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ und $f(x_1) = f(x_2)$. Dann gilt aber auch $g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = g \circ f(x_2)$, also ist $g \circ f$ ebenfalls nicht injektiv.

3. Nicht wahr: Sei $f : \{1, 2\} \to \{1, 2\}$ mit $f(1) = f(2) = 1$ und $g : \{1, 2\} \to \{1\}$ mit $g(1) = g(2) = 1$. Dann ist $g \circ f : \{1, 2\} \to \{1\}$ trivialerweise surjektiv, aber f ist nicht surjektiv.

4. Wahr: Sei $g \circ f$ surjektiv und sei $z \in Z$. Dann existiert ein $x \in X$ mit $g \circ f(x) = z$, da $g \circ f$ surjektiv ist. Aber dann existiert natürlich auch ein $y \in Y$ mit $y \in Y$ mit $g(y) = z$, nämlich $y = f(x)$. Demnach ist g ebenfalls surjektiv.

Präsenzaufgabe 4.2

1. Sei
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x + 1 & \text{falls } x < 1 \\ x(x + 1) & \text{falls } x \geq 1 \end{cases}.$$
Zeigen Sie, dass f bijektiv ist und geben Sie die Umkehrfunktion an.
2. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto |x|$ die Betragsfunktion. Zeigen Sie, dass $g \circ f$ nicht injektiv aber surjektiv ist.
3. Geben Sie eine Teilmenge A von $\mathbb{R}$ an, sodass $g \circ f$ eingeschränkt auf A eine Bijektion $g \circ f|_A : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ induziert.

Beweis:

1. Es gilt $f((-\infty,1)) = (-\infty,2)$ und die Einschränkung von f auf $(-\infty,1)$ ist offensichtlich injektiv. Als nächstes machen wir uns die Identität $f([1,\infty)) = [2,\infty)$ klar. Ist $x \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\begin{aligned}
x(x+1) \geq 2 &\iff x^2 + x \geq 2 \\
&\iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq 2 \\
&\iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{9}{4} \\
&\iff \left(x + \frac{1}{2}\right) \geq \frac{3}{2} \vee -\left(x + \frac{1}{2}\right) \geq \frac{3}{2} \\
&\iff x \geq 1 \vee x \leq -2
\end{aligned}$$

womit

$$f([1,\infty)) \subseteq [2,\infty) \qquad (*)$$

folgt. Ist $y \in [2,\infty)$ so gilt

$$\begin{aligned}
x(x+1) = y &\iff x^2 + x - y = 0 \\
&\iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4y}}{2} \qquad (1 + 4y \geq 1 + 4 \cdot 2 = 9 \geq 0)
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\frac{-1 + \sqrt{1+4y}}{2} \geq \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1$$

und

$$\frac{-1 - \sqrt{1+4y}}{2} \leq \frac{-1-3}{2} = -2.$$

Hieraus können wir mit Hilfe $(*)$ schließen, dass für jedes $y \in [2,\infty)$

$$f^{-1}(\{y\}) \cap [1,\infty) = \left\{\frac{-1+\sqrt{1+4y}}{2}\right\} \qquad (**)$$

und somit $f([1,\infty)) = [2,\infty)$ gilt. Damit ist f surjektiv. Zudem haben wir gezeigt, dass f eingeschränkt auf $[1,\infty)$ injektiv ist. Die Injektivität auf ganz $\mathbb{R}$ folgt, da

$$f((-\infty,1)) \cap f([1,\infty)) = (\infty,2) \cap [2,\infty) = \emptyset.$$

Die Umkehrfunktion g ist auf $[-\infty,2)$ offensichtlich gegeben durch $y \mapsto y-1$. Aus $(**)$ folgt, dass die Umkehrfunktion auf $[2,\infty)$ gegeben ist durch $y \mapsto \frac{-1+\sqrt{1+4y}}{2}$, also ist

$$g = f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto \begin{cases} y-1 & \text{falls } y < 2 \\ \frac{-1+\sqrt{1+4y}}{2} & \text{falls } y \geq 2. \end{cases}$$

2. Es gilt $g(f(-3)) = |-3+1| = 2 = |2| = g \circ f(1)$ aber $-3 \neq 1$, also ist f nicht injektiv. (Allgemeiner gilt: Ist f surjektiv und g nicht injektiv so ist auch $g \circ f$ nicht injektiv). Da f und g beide surjektiv sind ist es auch $g \circ f$.

3. Sei $A = [-1,\infty)$. Da $f([-1,\infty)) = [0,\infty)$ (da $f([-1,1)) = [0,2)$ und $f([1,\infty)) = [2,\infty)$ siehe Beweis von 1) ist $g \circ f(x) = |f(x)| = f(x)$ für jedes $x \in A$. Also ist die Einschränkung von $g \circ f$ auf A injektiv, da f injektiv ist, aber auch surjektiv da $g \circ f([-1,\infty)) = g(f([-1,\infty))) = g([0,\infty)) = \mathbb{R}_{\geq 0}$.

[**Hinweis:** A ist nicht eindeutig - es gibt unendlich viele Möglichkeiten für A! Man hätte auch $B = [-\infty,-1]$ wählen können, dort ist $g \circ f$ gegeben durch $x \mapsto |x+1| =$

$-(x+1)$, also induziert $g \circ f$ auf B eine Bijektion $B \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Aus diesen beiden Beispielen können wir uns weitere derartige Mengen basteln: Sei $\dot{\bigcup}_{i \in I} Y_i = \mathbb{R}_{\geq 0}$ (disjunkte Vereinigung) mit $\emptyset \neq Y_i \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ für alle $i \in I$ wobei I eine nicht leere Menge ist. Ist $J \subseteq I$ eine Teilmenge so ist

$$C = \bigcup_{j \in J} \big((g \circ f)^{-1}(Y_j) \cap A\big) \cup \left(\bigcup_{i \in I \setminus J} ((g \circ f)^{-1}(Y_i) \cap B \right)$$

eine weitere Menge mit $g \circ f|_C$ bijektiv.]

Präsenzaufgabe 4.3 Konstruieren Sie eine Bijektion

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$

und geben Sie die Umkehrfunktion an.

Lösung: Wir definieren

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{falls } n \in 2\mathbb{N} \\ -\frac{n-1}{2} & \text{falls } n \in 2\mathbb{N}_0 + 1 \end{cases}$$

Dann ist f injektiv auf $2\mathbb{N}$ und $2\mathbb{N}_0+1$ und es gilt $f(2\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ und $f(2\mathbb{N}_0+1) = -\mathbb{N}_0$. Damit folgt, dass f injektiv auf ganz $\mathbb{N}$ und surjektiv, also auch bijektiv ist. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$f^{-1} : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N}, m \mapsto \begin{cases} 2m & \text{falls } m \in \mathbb{N} \\ -2m+1 & \text{falls } m \in -\mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Präsenzaufgabe 4.4 Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz und geben Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert an:

1. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left((-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\right)_{n \in \mathbb{N}}$
2. $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{-n^2+3n-2}{n^3+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$
3. $(d_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{2^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$
4. $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{\binom{n}{3}}{\binom{n}{2}+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Lösung:

1. Beh. $a_n \to -2$ für $n \to \infty$:

Die Behauptung ist äquivalent zu $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ für $n \to \infty$, da

$$\begin{aligned} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} - 2 \overset{n\to\infty}{\to} -2 &\iff (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} - 2 + 2 \overset{n\to\infty}{\to} 0 \\ &\iff (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \\ &\iff \frac{1}{\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \qquad (|-1|^n = 1 \, \forall n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Sei $\epsilon \in \mathbb{R}$ mit $\epsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\epsilon^2}$. Dann folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| &= \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n_0}} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Die erste Ungleichung folgt mit

$$n \geq n_0 \iff \sqrt{n} \geq \sqrt{n_0} \iff \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_0}}$$

und die zweite Ungleichung aus unserer Wahl von n_0, da

$$n_0 > \frac{1}{\epsilon^2} \iff \sqrt{n_0} > \frac{1}{\epsilon} \iff \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \epsilon.$$

Also gilt $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ für $n \to \infty$.

2. Beh: $b_n \to 0$ für $n \to \infty$.

Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $n^2 - 3n + 2 \geq n^2 - 3n$ und

$$n^2 - 3n \geq 0 \iff n^2 \geq 3n \iff n \geq 3.$$

Zusätzlich gilt $2 \leq n^2$ genau dann wenn $n \geq 2$.
Sei nun $\epsilon > 0$ und $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $n_1 > \frac{2}{\epsilon}$ und definiere

$$n_0 := \max\{2, 3, n_1\} = \max\{3, n_1\}.$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{-n^2 + 3n - 2}{n^3 + 1} - 0 \right| &= \left| \frac{n^2 - 3n + 2}{n^3 + 1} \right| \\ &= \frac{n^2 - 3n + 2}{n^3 + 1} \qquad (n \geq n_0 \geq 3) \\ &\leq \frac{n^2 + 2}{n^3 + 1} \\ &\leq \frac{n^2 + n^2}{n^3 + 1} \qquad (n \geq n_0 > 2) \\ &= \frac{2n^2}{n^3} \\ &= \frac{2}{n} \\ &\leq \frac{2}{n_0} \qquad (n \geq n_0) \\ &< \epsilon \qquad (n_0 \geq n_1) \end{aligned}$$

3. Beh: $d_n \to 0$ für $n \to \infty$:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt

$$d_n = \prod_{j=1}^{n} \frac{2}{j} = \frac{2}{1} \left(\prod_{j=2}^{n-1} \frac{2}{j} \right) \frac{2}{n} \leq 2 \left(\prod_{j=2}^{n-1} 1 \right) \frac{2}{n} = \frac{4}{n} \qquad (*)$$

Da $d_1 = 2 < 4$, gilt $(*)$ auch für $n = 1$.

Sei nun $\epsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{4}{\epsilon}$. Dann folgt für alle $n \geq n_0$

$$|d_n - 0| = \left|\frac{2^n}{n!} - 0\right| = \frac{2^n}{n!} \overset{(*)}{\leq} \frac{4}{n} \overset{n \geq n_0}{\leq} \frac{4}{n_0} < \epsilon$$

da die die letzte Ungleichung $\frac{4}{n_0} < \epsilon$ äquivalent zu $n_0 > \frac{4}{\epsilon}$ ist. Damit folgt $d_n \to 0$ für $n \to \infty$.

4. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt $\binom{n}{2} \geq 1$ und somit

$$\frac{\binom{n}{3}}{\binom{n}{2} + 1} \geq \frac{\binom{n}{3}}{\binom{n}{2} + \binom{n}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\binom{n}{3}}{\binom{n}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{6} n(n-1)(n-2)}{\frac{1}{2} n(n-1)} = \frac{1}{6}(n-2)$$

aber $\frac{1}{6}(n-2) \to \infty$ für $n \to \infty$, dementsprechend ist $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt und konvergiert demnach nicht.
