Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

Analysis für Informatiker

5. Hausaufgabenblatt - Lösungen

Hausaufgabe 5.1 Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen. Beweisen oder widerlegen Sie:

1. $g \circ f$ injektiv und f surjektiv $\Rightarrow g$ injektiv
2. g, f surjektiv $\Rightarrow g \circ f$ surjektiv
3. Sei f surjektiv und $\emptyset \neq A \subseteq X$ eine Teilmenge, sodass die Einschränkung $f|_A : A \to Y, a \mapsto f(a)$ injektiv ist und sodass für alle $x \in X \setminus A$ bereits $f(x) \in f(A)$ gilt. Dann ist $f|_A$ bijektiv.
4. Seien $A, B \subset X$. Dann gilt $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

Beweis: 1. Wahr: Seien $y_1, y_2 \in Y$ und $g(y_1) = g(y_2)$. Da f surjektiv ist existieren $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_i) = y_i$ für $i \in \{1, 2\}$. Damit folgt $g \circ f(x_1) = g(y_1) = g(y_2) = g \circ f(x_2)$. Da $g \circ f$ injektiv ist, folgt $x_1 = x_2$ und somit $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$, also ist g injektiv.

2. Wahr: Sei $z \in Z$. Da g surjektiv ist, existiert ein $y \in Y$ mit $g(y) = z$. Da f surjektiv ist, existiert ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Somit gilt $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$, also ist $g \circ f$ surjektiv.

3. Wahr: Angenommen $f|A$ ist nicht bijektiv. Dann ist $f|_A$ nicht surjektiv, da $f|_A$ injektiv ist per Annahme. Also existiert ein $y \in Y$ mit $y \notin f(A)$. Da f surjektiv ist, existiert ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Aufgrund von $y \notin f(A)$ gilt $x \notin A$, aber nach Voraussetzung gilt $y = f(x) \in f(A)$. Widerspruch. Somit ist $f|_A$ bijektiv.

4. Nicht wahr: Sei $X = \{1, 2\}$ und $Y = \{1\}$. Dann ist f trivialerweise konstant und es gilt

$$f(\{1\} \cap \{2\}) = f(\emptyset) = \emptyset \neq \{1\} = \{1\} \cap \{1\} = f(\{1\}) \cap f(\{2\}).$$

(Hinweis: $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ gilt tatsächlich für alle Teilmengen $A, B \subseteq X$).

Hausaufgabe 5.2 Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{2x+1}{x-3} & \text{falls } x \neq 3 \\ 2 & \text{falls } x = 3. \end{cases}$$

Entscheiden Sie ob f bijektiv ist und bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion.

Lösung:

Die Abbildung ist bijektiv, denn seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y \neq 2$ und $x \neq 3$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x-3} = y &\iff 2x + 1 = (x-3)y \\ &\iff (2-y)x = -(3y+1) \\ &\iff x = \frac{3y+1}{y-2}. \end{aligned}$$

Also hat jedes $y \neq 2$ genau ein Urbild unter f und zwar $\frac{3y+1}{y-2}$. Offensichtlich gilt $f^{-1}(\{2\}) = \{3\}$, also ist f bijektiv mit Umkehrabbildung

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto \begin{cases} \frac{3y+1}{y-2} & \text{falls } y \neq 2 \\ 3 & \text{falls } y = 2 \end{cases}.$$

Hausaufgabe 5.3 Beweisen Sie den folgenden Satz. Seien X, Y endliche Mengen.

So gibt es genau $|Y|^{|X|}$ Abbildungen von X nach Y, und unter diesen Abbildungen sind genau $|Y|(|Y|-1)(|Y|-2)...(|Y|-|X|+1)$ Injektionen.

Beweis: Beweis durch vollständige Induktion. Wenn $|X| = 1$ und $X = \{x\}$, dann gibt es für jede $y \in Y$ genau eine Abbildung $f : X \to Y$, sodass $f(x) = y$. Darum gibt es $|Y|$ Abbildungen von X nach Y. Diese Abbildungen sind alle injektiv. Sei jetzt $n \in \mathbb{N}$. Nehme an, dass für alle Mengen X' mit $|X'| = n$ es $|Y|^n$ Abbildungen und $|Y|(|Y|-1)(|Y|-2)...(|Y|-n+1)$ Injektionen von X' nach Y gibt. Sei X eine Menge mit $|X| = n+1$. Wähle eine Teilmenge X' von X mit $|X'| = n$. Sei $x \in X \setminus X'$. Jede Abbildung $f : X \to Y$ wird bestimmt durch $f|_{X'}$ und $f(x)$: für jede Abbildung $\phi : X' \to Y$ und $y \in Y$ gibt es genau eine Abbildung $f : X \to Y$ mit $f|_{X'} = \phi$ und $f(x) = y$. Weil es $|Y|^n$ Abbildungen $\phi : X' \to Y$ gibt und $|Y|$ Elementen in Y, gibt es genau $|Y|^n\,|Y| = |Y|^{n+1}$ Abbildungen von X nach Y. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann eine Injektion, wenn $f|_{X'}$ eine Injektion ist und $f(x) \notin f(X')$. Weil es $|Y|(|Y|-1)(|Y|-2)...(|Y|-n+1)$ Injektionen von X' nach Y und $|Y| - |X'| = |Y| - n$ Elementen in $Y \setminus f(X')$ gibt, gibt es $|Y|(|Y|-1)(|Y|-2)...(|Y|-n+1)(|Y|-n)$ Injektion von X nach Y.

Hausaufgabe 5.4 Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und $\mathrm{Abb}(X, \{0,1\})$ die Menge der Abbildungen zwischen X und der Menge $\{0,1\}$ $(0 \neq 1)$. Zeigen Sie, dass eine Bijektion $f : P(X) \to \mathrm{Abb}(X, \{0,1\})$ existiert und geben Sie die Umkehrfunktion an.

Beweis: Für eine Teilmenge $A \subseteq X$ sei

$$\chi_A : X \to \{0,1\}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}.$$

Dann ist $\chi_A \in \mathrm{Abb}(X, \{0,1\})$ und es gilt

$$\chi_A^{-1}(\{1\}) = A \qquad (*)$$

für alle $A \in P(X)$. Wir behaupten, dass die Abbildung

$$f : P(X) \mapsto \mathrm{Abb}(X, \{0,1\}), A \mapsto \chi_A$$

bijektiv ist. Seien $A, B \in P(X)$ mit $\chi_A = f(A) = f(B) = \chi_B$. Aufgrund von $(*)$ folgt $A = B$, also ist f injektiv. Ist $\eta \in \mathrm{Abb}(X, \{0,1\})$, so gilt

$$\eta = \chi_{\eta^{-1}(\{1\})} \qquad (**),$$

da sowohl η als auch $\chi_{\eta^{-1}(\{1\})}$ auf $\eta^{-1}(\{1\})$ konstant 1 und auf $\eta^{-1}(\{0\})$ konstant 0 sind und da $X = \eta^{-1}(\{1\}) \cup \eta^{-1}(\{0\})$ gilt. Die Umkehrabbildung ist nach $(**)$ gegeben durch

$$f^{-1} : \mathrm{Abb}(X, \{0,1\}) \to P(X), \eta \mapsto \eta^{-1}(\{1\}).$$

Hausaufgabe 5.5 Entscheiden Sie, welche der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

1. $a_n := \frac{-n^3+1}{3n^5-2} + 3$

2. $a_n := (-1)^n\sqrt{n^2+1}$

3. $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ (Hinweis: Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ mit $x \neq -y$ gilt $x - y = \frac{x^2-y^2}{x+y}$.)

4. $a_n := n!/(n^n + 2n^2 + 5)$

Lösung:

1.
Sei $\epsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > 1$ und $n_0 > \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}}$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{-n^3+1}{3n^5-2} - 0\right| &= \left|\frac{n^3-1}{3n^5-2} - 0\right| \\
&= \frac{n^3-1}{3n^5-2} \\
&\leq \frac{n^3}{3n^5-2} \\
&\leq \frac{n^3}{3n^5-n^5} \qquad (n > 1) \\
&= \frac{1}{2n^2} \\
&\leq \frac{1}{2n_0^2} \qquad (n \geq n_0) \\
&< \epsilon \qquad \left(n_0 > \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}}\right)
\end{aligned}$$

dementsprechend gilt $\frac{-n^3+1}{3n^5-2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ was äquivalent zu $\frac{-n^3+1}{3n^5-2} + 3 \overset{n\to\infty}{\to} 3$ ist.

2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|(-1)^n\sqrt{n^2+1}| = \sqrt{n^2+1} \geq \sqrt{n^2} = n$$

also ist die Folge unbeschränkt und konvergiert dementsprechend nicht.

3. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1 = n + 1 - n = \sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2 = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$$

was äquivalent zu

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

ist. Nun gilt

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Präsenzblatt 4.4.1 gilt $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ für $n \to \infty$ und demnach $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$ für $n \to \infty$.

4. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$0 \leq \frac{n!}{n^n + 2n^2 + 5} \leq \frac{n!}{n^n} = \prod_{j=1}^{n} \frac{j}{n} = \frac{1}{n} \prod_{j=2}^{n} \frac{j}{n} \leq \frac{1}{n} \prod_{j=2}^{n} 1 = \frac{1}{n}$$

und demnach $\frac{n!}{n^n+2n^2+5} \to 0$ für $n \to \infty$.

Abgabe der Hausaufgaben bis zum Sonntag den 26.11.2023, 23.59 Uhr in Panda.