Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

Analysis für Informatiker

5. Präsenzübungsblatt - Lösungen

Präsenzaufgabe 5.1 *(Newtonverfahren)* Seien $n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}_{>0}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n - c$. Wir schreiben f' für die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto nx^{n-1}$. Sei $x_0 = 1$ und definiere für $k \in \mathbb{N}$ rekursiv

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}.$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktionen f und

$$t_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

(b) Zeigen Sie, dass x_1 die einzige Nullstelle von t_0 ist.

(c) Geben Sie eine Beschreibung von x_k. Malen Sie Bilder!

(d) Zeigen Sie, dass $x_k^n \geq c$ für alle $k \in \mathbb{N}$. (*Hinweis:* Die Bernoulli Ungleichung könnte hilfreich sein.)

(e) Zeigen Sie, dass $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist.

(f) Zeigen Sie, dass $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und $\lim_{k\to\infty} x_k = \sqrt[n]{c}$.

Lösung:

(a),(c) Siehe Präsenzübung.

(b) Einsetzen von x_1 in t_0 liefert sofort $t_0(x_1) = 0$. Die Gleichung $t_0(x) = 0$ ist eine polynomiale Gleichung von Grad 1 und hat damit genau eine Nullstelle, also ist x_1 die einzige Nullstelle von t_0.

(d) Wir beweisen erst mit Induktion, dass $x_k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Für $k = 0$ gilt $x_k = x_0 = 1 > 0$. Sei jetzt $k \in \mathbb{N}$ und nehme an, dass $x_{k-1} > 0$. Es gilt

$$x_k = x_{k-1} - \frac{x_{k-1}^n - c}{nx_{k-1}^{n-1}} = x_{k-1}\left(1 - \frac{x_{k-1}^n - c}{nx_{k-1}^n}\right)$$

Weil $x_{k-1} > 0$ und $c > 0$, gilt $x_{k-1}^n - c < x_{k-1}^n \leq nx_{k-1}^n$. Darum $\frac{x_{k-1}^n - c}{nx_{k-1}^n} < 1$. Es folgt $x_k > 0$. Dies beweist, dass $x_k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.
Weil $x_{k-1} > 0$ und $c > 0$, gilt $\frac{c}{nx_{k-1}^n} > 0$ and damit $-\frac{1}{n} + \frac{c}{nx_{k-1}^n} \geq -\frac{1}{n} \geq -1$. Mit Hilfe der Bernoulli Ungleichung folgt

$$x_k^n = x_{k-1}^n\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{c}{nx_{k-1}^n}\right)^n \geq x_{k-1}^n\left(1 + n\left(-\frac{1}{n} + \frac{c}{nx_{k-1}^n}\right)\right) = c.$$

(e) Für jede $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ gilt $x_{k-1}^n - c \geq 0$ und $x_{k-1}^{n-1} > 0$. Darum folgt

$$x_k = x_{k-1} - \frac{x_{k-1}^n - c}{nx_{k-1}^{n-1}} \leq x_{k-1}.$$

(f) Weil $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist und $x_{k-1}^n \geq c$, ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von unten beschränkt. Damit ist die Folge konvergent. Sei $x := \lim_{k\to\infty} x_k$. Weil $x_k - x_{k-1} + \frac{x_{k-1}^n - c}{n x_{k-1}^{n-1}} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, gilt

$$0 = \lim_{k\to\infty}\left(x_k - x_{k-1} + \frac{x_{k-1}^n - c}{n x_{k-1}^{n-1}}\right) = x - x + \frac{x^n - c}{n x^{n-1}} = \frac{x^n - c}{n x^{n-1}}$$

und damit $x^n = c$.

Präsenzaufgabe 5.2 Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

1. $\left(\frac{\sqrt[n]{n} + \frac{2^n}{n!}}{\sqrt[3]{n}} + 8\sqrt[n]{n} - 3\right)_{n\in\mathbb{N}}$
2. $\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
3. $\left(\frac{n^5 - n + 7}{5n^5 + 1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
4. $\left((-1)^n \frac{n^5 - n + 7}{5n^5 + 1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Lösung:
1. Wir wissen aus der Vorlesung, dass $\sqrt[n]{n} \overset{n\to\infty}{\to} 1$ und $\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ und aus PA 4.4.3, dass $\frac{2^n}{n!} \overset{n\to\infty}{\to} 0$. Dementsprechend gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n} + \frac{2^n}{n!}}{\sqrt[3]{n}} + 8\sqrt[n]{n} - 3 &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\sqrt[n]{n} + \frac{2^n}{n!}\right)\frac{1}{\sqrt[3]{n}} + 8\sqrt[n]{n} - 3\right) \\
&= \left(\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n} + \frac{2^n}{n!}\right)\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) + \lim_{n\to\infty}(8\sqrt[n]{n}) - \lim_{n\to\infty} 3 \\
&= \left(\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}) + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{n!}\right)\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) + 8\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}) - 3 \\
&= (1+0)\cdot 0 + 8\cdot 1 - 3 \\
&= 5.
\end{aligned}$$

2. Es gilt $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0$ und nach HA 5.5.3 $\lim_{n\to 0}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$. Ist nun $m \in \mathbb{N}$ beliebig, so existiert ein n_0, sodass $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{m}$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Also folgt für alle $n \geq n_0$ auch

$$m \leq \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}.$$

Demnach ist $\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben unbeschränkt, also auch nicht konvergent.

3. Es gilt

$$\frac{n^5 - n + 7}{5n^5 + 1} = \frac{1 - \frac{1}{n^4} + \frac{7}{n^5}}{5 + \frac{1}{n^5}} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1 - 0 - 0}{5 + 0} = \frac{1}{5}.$$

4. Sei $\epsilon = \frac{1}{10}$. Da $\frac{n^5 - n + 7}{5n^5 + 1} \to \frac{1}{5}$ für $n \to \infty$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass

$$\left|\frac{n^5 - n + 7}{5n^5 + 1} - \frac{1}{5}\right| < \frac{1}{10}.$$

für alle $n \geq n_0$ gilt, was äquivalent zu

$$\frac{n^5 - n + 7}{5n^5 + 1} \in \left(\frac{1}{10}, \frac{3}{10}\right)$$

für alle $n \geq n_0$ ist. Demnach gilt

$$(-1)^n \frac{n^5 - n + 7}{5n^5 + 1} = \frac{n^5 - n + 7}{5n^5 + 1} \in \left(\frac{1}{10}, \frac{3}{10}\right)$$

für alle $n \geq n_0$ mit $n \in 2\mathbb{N}$ und

$$(-1)^n \frac{n^5 - n + 7}{5n^5 + 1} = -\frac{n^5 - n + 7}{5n^5 + 1} \in \left(-\frac{3}{10}, -\frac{1}{10}\right)$$

für alle $n \geq n_0$ mit $n \in 2\mathbb{N} + 1$, also ist

$$|c_n - c_{n+1}| > \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

für alle $n \geq n_0$.

Angenommen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent gegen ein $c \in \mathbb{C}$. Dann existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $n_1 \geq n_0$, sodass für alle $n \geq n_1$ bereits $|c_n - c| < \frac{1}{10}$ gilt. Damit folgt

$$|c_n - c_{n+1}| = |c_n - c - (c_{n+1} - c)| \leq |c_n - c| + |c_{n+1} - c| < \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5},$$

aber $|c_n - c_{n+1}| > \frac{1}{5}$ für alle $n \geq n_1 \geq n_0$, also ist die Folge nicht konvergent.

Präsenzaufgabe 5.3 Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit

$$a_n = n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right),$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Hinweis: Die Identität $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ $(a, b \in \mathbb{R})$ könnte von Vorteil sein.

Lösung Es gilt

$$a_n = \frac{n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)}$$

Die Folge $\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und nach unten durch 1 beschränkt und ist damit konvergent. Das Quadrat des Grenzwerts ist gleich 1, also muss der Grenzwert ebenfalls 1 oder -1 sein. Da $\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ kann der Grenzwert nicht -1 sein, also ist der Grenzwert 1. Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right) + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

Präsenzaufgabe 5.4 Sind die folgende Aussagen richtig oder falsch? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) Die Summe zweier beschränkter Folgen in $\mathbb{R}$ ist konvergent.

(b) Ist die Summe zweier Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergent, dann konvergieren auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selbst.

(c) Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, dann ist die Folge $((-1)^n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

(d) Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gegen a, so ist $(a_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Lösung:

(a) Falsch: Sei $a_n = (-1)^n$ und $b_n = 0$ für $n \in \mathbb{N}$. Beide Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind beschrankt, aber $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht konvergent.

(b) Falsch: Sei $a_n = (-1)^n$ und $b_n = -a_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht konvergent, aber $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

(c) Falsch: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Dann ist $((-1)^n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls eine Nullfolge, also konvergent gegen 0.

(d) Wahr: Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gegen a konvergiert, dann gibt es für jede $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für $n > N$ gilt $|a_n - a| < \epsilon$. Nun gilt für die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = a_n - a$, dass $|b_n - 0| = |(a_n - a) - 0| = |a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$. Damit ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.
