Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

# Analysis für Informatiker

## 6. Hausaufgabenblatt - Lösungen

**Hausaufgabe 6.1** Entscheiden Sie, welche der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

1. $a_n := \frac{1}{\sqrt{n^3}} \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{3}+7+\frac{8}{n}} + \frac{7n^2+n+7}{n^2+3n+1}$
2. $a_n := (-1)^n \frac{7n^7-4}{n^7+n+1}$
3. $a_n := \sqrt[n]{a^n+b^n}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $0 < a \leq b$.
4. $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) + (-1)^{n+1} \sqrt[n]{n}$

**Lösung:**

1. Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{3}+7+\frac{8}{n}} + \frac{7n^2+n+7}{n^2+3n+1} &= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{3}+7+\frac{8}{n}}\right) + \lim_{n\to\infty} \frac{7n^2+n+7}{n^2+3n+1} \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{3}+7+\frac{8}{n}}\right) + \lim_{n\to\infty} \frac{7+\frac{1}{n}+\frac{7}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}} \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)\left(\frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3}+7+\frac{8}{n}}\right) + \frac{\lim_{n\to\infty} 7+\frac{1}{n}+\frac{7}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}} \\
&= 0 \cdot \frac{1}{1+7+0} + \frac{7}{1} \\
&= 7
\end{aligned}$$

2. Es gilt $\frac{7n^7-4}{n^7+n+1} = \frac{7-\frac{4}{n^7}}{1+\frac{1}{n^6}+\frac{1}{n^7}} \to 7$ für $n \to \infty$. Da $7 \neq 0$ folgt die Divergenz aufgrund der Anwesenheit von $(-1)^n$ analog zur Lösung von PA 5.2.4. (die Folge $(a_{n+1}-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge).

3. Wir merken an, dass für $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ immer $x < y \iff \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$ gilt $(*)$.

Damit folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
b = \sqrt[n]{b^n} &< \sqrt[n]{a^n+b^n} && (a > 0 \text{ und nach } (*)) \\
&\leq \sqrt[n]{b^n+b^n} && (0 < a \leq b \text{ und nach } (*)) \\
&= \sqrt[n]{2b^n} \\
&= \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{b^n} \\
&= \sqrt[n]{2} \cdot b
\end{aligned}$$

Da $\sqrt[n]{2} \to 1$ und folgt $\sqrt[n]{a^n+b^n} \to b = \max\{a, b\}$ für $n \to \infty$ nach dem Sandwich lemma.

4. Es gilt

$$(-1)^n\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)+(-1)^{n+1}\sqrt[n]{n}=(-1)^n\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}-\sqrt[n]{n}\right).$$

Die Folge $\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}-\sqrt[n]{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge und $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt. Damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Nullfolge (siehe Beweis von HA 6.4.1.).

**Hausaufgabe 6.2** Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

konvergiert.

(Hinweis: Verwenden Sie den binomischen Lehrsatz um zu zeigen, dass

$$a_n = 2+\sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}\frac{1}{n^j}$$

für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt. Zeigen Sie anschließend die Ungleichung $\binom{n}{j}\frac{1}{n^j}\leq\frac{1}{j(j-1)}=\frac{1}{j-1}-\frac{1}{j}$ für alle $j\in\mathbb{N}$ mit $j\geq 2$ und folgern Sie

$$a_n = 2+\sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}\frac{1}{n^j}\leq 3-\frac{1}{n}<3.$$

für alle $n\in\mathbb{N}$.

Zeigen Sie danach, zum Beispiel mit der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel (Hausaufgabe 3.3), dass $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt und verwenden Sie anschließend den Satz der monotonen Konvergenz.

Später wird gezeigt, dass der Grenzwert die Eulersche Konstante $e$ ist.)

**Beweis:** Nach dem binomischen Lehrsatz gilt für jedes $n\in\mathbb{N}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\binom{n}{0}\frac{1}{n^0}+\binom{n}{1}\frac{1}{n^1}+\sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}\frac{1}{n^j}=2+\sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}\frac{1}{n^j}.$$

Sei nun $n\geq 2$ und $j\in\{2,\cdots,n\}$. Dann gilt

$$\binom{n}{j}\frac{1}{n^j}=\frac{1}{j!}\frac{n!}{(n-j)!}\frac{1}{n^j}=\frac{1}{j!}\left(\prod_{i=0}^{j-1}(n-i)\right)\frac{1}{n^j}=\frac{1}{j!}\left(\prod_{i=0}^{j-1}\frac{n-i}{n}\right)\leq\frac{1}{j!}\leq\frac{1}{j(j-1)}.$$

Da $\frac{1}{j-1)}-\frac{1}{j}=\frac{j-(j-1)}{j(j-1)}=\frac{1}{j(j-1)}$ folgt

$$\binom{n}{j}\frac{1}{n^j}\leq\frac{1}{j-1}-\frac{1}{j}.$$

Zusätzlich gilt

$$\sum_{j=2}^{n}\left(\frac{1}{(j-1)}-\frac{1}{j}\right)=\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j-1}-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}=1-\frac{1}{n}.$$

Insgesamt ergibt sich somit für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} \leq 2 + \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{1}{j-1)} - \frac{1}{j}\right) = 2 + 1 - \frac{1}{n} < 3.$$

Demnach ist die Folge nach oben beschränkt.

Nun zur Monotonie: Nach HA 3.3 gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right)^n \geq \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

was äquivalent zu

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist. Demnach folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} &= \sqrt[n+1]{1 \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\
&\leq \frac{1}{n+1} \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n+1} \left(1 + n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \frac{1 + (n+1)}{n+1} \\
&= 1 + \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Die Ungleichung

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \leq 1 + \frac{1}{n+1}$$

ist aber äquivalent zu

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, womit gezeigt wurde, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton steigend ist. Damit konvergiert die Folge nach dem Satz der monotonen Konvergenz.

**Hausaufgabe 6.3** Gegeben sei die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, wobei

$$a_0 \in \mathbb{R}$$

und

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$.

1. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert, falls $0 \leq a_0 \leq \frac{1}{2}$.

2. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergiert, falls $a_0 > \frac{1}{2}$. (Hinweis: Zeigen Sie, dass $a_n \geq a_0 + n(a_0 - \frac{1}{2})^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.)

3. Welches Konvergenzverhalten hat die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für $a_0 < 0$?

**Lösung:**

Zuerst stellen wir fest, dass die Folge für jedes $a_0 \in \mathbb{R}$ monoton steigend ist. Sei hierzu $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $0 \leq (a_n - \frac{1}{2})^2$ aber auch

$$0 \leq (a_n - \frac{1}{2})^2 \iff 0 \leq a_n^2 - a_n + \frac{1}{4} \iff a_n \leq a_n^2 + \frac{1}{4} \iff a_n \leq a_{n+1}.$$

Zu 1: Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + \frac{1}{4}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, die Ungleichung $0 \leq \frac{1}{4} \leq x^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. und demnach

$$f([0, 1/2]) \subseteq [0, 1/2].$$

Hieraus folgt sofort $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}$ falls $a_0 \in [0, 1/2]$ gilt, da $a_n$ gegeben ist durch $n$-malige Anwendung von $f$ auf $a_0$. Nach dem Satz der monotonen Konvergenz konvergiert die Folge, falls $0 \leq a_0 \leq \frac{1}{2}$.

Zu 2: Für die Divergenz im Falle $a_0 < \frac{1}{2}$ ist nur der Hinweis zu zeigen, da für $a_0 > \frac{1}{2}$ die Folge $(a_0 + n(a_0 - \frac{1}{2})^2)_{n\in\mathbb{N}}$ offensichtlich nach oben unbeschränkt ist. Der Beweis des Hinweises wird per Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ geführt. Für $n = 1$ gilt

$$a_1 = a_0^2 + \frac{1}{4} = a_0 + a_0^2 - a_0 + \frac{1}{4} = a_0 + 1 \cdot \left(a_0 - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Angenommen die Abschätzung im Hinweis ist wahr für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_0 &= (a_{n+1} - a_n) + (a_n - a_0) \\ &\geq (a_{n+1} - a_n) + n\left(a_0 - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= a_n^2 + \frac{1}{4} - a_n + n\left(a_0 - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 + n\left(a_0 - \frac{1}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Am Anfang wurde gezeigt, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend ist, unabhängig von $a_0$. Ist nun $a_0 > \frac{1}{2}$ so gilt demnach auch $a_n \geq a_0 > \frac{1}{2}$ und deswegen $\left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 \geq \left(a_0 - \frac{1}{2}\right)^2$. Insgesamt folgt

$$a_{n+1} - a_0 \geq \left(a_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + n\left(a_0 - \frac{1}{2}\right)^2 = (n+1)\left(a_0 - \frac{1}{2}\right)^2$$

was äquivalent zu $a_{n+1} \geq a_0 + (n+1)(a_0 - \frac{1}{2})^2$ ist. Damit ist 2. bewiesen.

Zu 3: Die Folge mit Startwert $a_0 \in \mathbb{R}$ ist bis auf den 0-ten Folgeneintrag dieselbe Folge, wie die mit Startwert $-a_0$. Dementsprechend konvergiert die Folge für $a_0 \in [-1/2, 0]$ und divergiert für $a_0 < -\frac{1}{2}$.

**Hausaufgabe 6.4** Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{C}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge $\Rightarrow (a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge
2. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt $\Rightarrow (a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt
3. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt
4. $|a_n| < |a_{n+1}| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

**Lösung:**

1. Wahr. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, existiert ein $M \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$0 \leq |a_nb_n| = |a_n||b_n| \leq M|b_n| \to 0$$

da $b_n \to 0$. Also ist das Produkt eine Nullfolge.

2. Nicht wahr. Sei $a_n = n$ für $n \in \mathbb{N}$ gerade und $a_n = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ ungerade. Weiter sei $b_n = n$ für $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $b_n = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ gerade. Dann gilt $a_nb_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, aber die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind unbeschränkt.

3. Wahr: Sei $M \in \mathbb{R}_{>0}$. Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, also auch beschränkt durch eine Zahl $N \in \mathbb{R}_{>0}$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n| \geq N \cdot M$. Damit folgt

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \frac{|a_n|}{|b_n|} \geq \frac{|a_n|}{N} \geq \frac{N \cdot M}{N} = M.$$

Da $M > 0$ beliebig war, ist die Quotientenfolge $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt.

4. Nicht wahr. Die Folge gegeben durch $((-1)^n(1 - \frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein Gegenbeispiel.

---

Abgabe der Hausaufgaben bis zum Sonntag den 03.12.2023, 23.59 Uhr in Panda.