Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

Analysis für Informatiker

6. Präsenzübungsblatt - Lösungen

Präsenzaufgabe 6.1 Man überprüfe die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{n}}$,

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n} + 3^{-n})$,

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2 2^k}{(2k)!}$,

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2k)^k}$

(e) $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - 1)$.

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{1+3n}}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{n^2+n+1}}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^6 + n + 1}{3n^6 + n^2 + 1}$

Lösung:

(a). $\sqrt[n]{n} \to 1$ für $n \to \infty$. Die Folge $(\sqrt[n]{n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist demnach keine Nullfolge, also divergiert die Reihe.

(b). Die Reihe konvergiert: Es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ und $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$ (geometrische Reihe), womit $\sum_{n=0}^{\infty}(2^{-n} + 3^{-n}) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} = 2 + \frac{3}{2}$.

(c). Es gilt $\frac{\big((k+1)!\big)^2 2^{k+1}}{\big(2(k+1)\big)!} \frac{(2k)!}{(k!)^2 2^k} = \frac{(k+1)^2 2}{(2k+2)(2k+1)} = \frac{k+1}{2k+1}$. Weil $\lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{2k+1} = \frac{1}{2}$, ist die Reihe nach dem Quotientenkriterium konvergent.

(d). Es gilt $\frac{(2k)!}{(2k)^k} = \frac{k!(k+1)\cdots(k+k)}{2^k k^k} \geq \frac{k! k^k}{2^k k^k} = \frac{k!}{2^k} \to \infty$ nach PB 4.4.3. Also bilden die Glieder der Summe keine Nullfolge., demnach divergiert die Reihe.

(e). Für $k \geq 2$ gilt $(1+\frac{1}{2k})^k - 1 = \sum_{n=1}^{k} \binom{k}{n} (2k)^{-n} = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n!} 2^{-n} \frac{k}{k} \frac{k-1}{k} \cdots \frac{k-n+1}{k}$.
Jedes Glied in dieser Summe ist kleiner oder gleich $\frac{1}{2}$. Für $k > 1$ folgt, dass

$(1+\frac{1}{2k})^k \le \frac{k}{2}+1 \le k$ und damit $\frac{1}{2k} \le \sqrt[k]{k}-1$. Nach dem Minorantenkriterium ist die Reihe divergent.

(f). Es gilt $\frac{n^n}{3^{1+3n}} \ge \frac{28^n}{3^{1+3n}}$ für alle $n \ge 28$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{28^n}{3^{1+3n}}$ ist nach dem Wurzelkriterium nach oben unbeschränkt, da

$$\sqrt[n]{\frac{28^n}{3^{1+3n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{3}}\frac{28}{27} \to \frac{28}{27} > 1.$$

also divergiert auch die Reihe in (f).
(mit allgemeinerem Wurzelkriterium: $\frac{n^n}{3^{1+3n}}$ $\sqrt[n]{\frac{n^n}{3^{1+3n}}} = \frac{n}{3^{\frac{1}{n}+3}} = \frac{1}{27}\frac{n}{3^{\frac{1}{n}}} \to \infty$, da $3^{\frac{1}{n}} \to 1$ für $n \to \infty$. Nach dem Wurzelkriterium divergiert die Reihe.)

(g). Es gilt $\sqrt[n]{\frac{n^n}{3^{n^2+n+1}}} = \frac{n}{3^{n+1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{3}\frac{n}{3^n}\frac{1}{\sqrt[n]{3}} \to \frac{1}{3}\cdot 0 \cdot 1 = 0$ da $\frac{n}{3^n} \to 0$ für $n \to \infty$ (Es gilt $n^2 \le 3^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (Induktion über $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$) was äquivalent zu $\frac{n}{3^n} \le \frac{1}{n}$ ist). Damit konvergiert die Reihe nach dem Wurzelkriterium.

(h) Es gilt $\frac{n^6+n+1}{3n^6+n^2+1} \to \frac{1}{3}$ für $n \to \infty$. Da $\frac{1}{3} \ne 0$ konvergiert die Reihe nicht.

Präsenzaufgabe 6.2 Das Ziel der Hausaufgabe 6.2 ist zu zeigen, dass die Folge $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

In dieser Präsenzübung ist das Ziel zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ ebenfalls konvergiert und dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

gilt.

(Hinweis: Sei $c := \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Im Beweis der Hausaufgabe 6.2 wird gezeigt, dass $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend ist. Zeigen Sie zuerst, dass für fixes $m \in \mathbb{N}$ und alle $\epsilon > 0$ die Ungleichung $(1-\epsilon)\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \le c$ gilt. Machen Sie sich anschließend klar, dass diese Aussage äquivalent zu $\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \le c$ ist und folgern Sie, dass $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konvergiert und $\le c$ ist. Zeigen Sie anschließend die Ungleichung $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \ge c$.)

Beweis:
Sei $c := \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Im Beweis der Hausaufgabe wurde gezeigt, dass $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend ist, demnach gilt $c = \sup\{(1+1/k)^k : k \in \mathbb{N}\} \ge \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen zuerst, dass

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \le c \tag{1}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt. Damit folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ und die Ungleichung

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \le c. \tag{2}$$

(Hinweis: Die Konvergenz der Reihe hätte man auch durch das Quotientenkriterium beweisen können. Die Tatsache, dass der Limes $\le c$ ist, folgt allerdings nicht aus dem Quotientenkriterium.)

Sei hierzu $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Gleichung (1) für genanntes m ist äquivalent zu

$$(1-\epsilon)\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!} \le c \text{ für alle } \epsilon > 0. \tag{3}$$

Sei also $\epsilon > 0$ ebenfalls beliebig. Da für fixes $k \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{n!}{(n-k)!n^k} = \prod_{j=0}^{k-1}\frac{n-j}{n} \to \prod_{j=0}^{k-1} 1 = 1^k = 1$$

für $n \to \infty$, existiert ein $n_0 \ge m$, sodass

$$\frac{n_0!}{(n_0-k)!n_0^k} \ge (1-\epsilon)$$

für jedes $k \in \{1, \dots, m\}$ gilt. Damit folgt nach dem binomischen Lehrsatz

$$\begin{aligned}
c \ge \left(1+\frac{1}{n_0}\right)^{n_0} &= \sum_{k=0}^{n_0}\binom{n_0}{k}\frac{1}{n_0^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n_0}\frac{n_0!}{(n_0-k)!n_0^k}\frac{1}{k!} \\
&\ge \sum_{k=0}^{m}\frac{n_0!}{(n_0-k)!n_0^k}\frac{1}{k!} \\
&\ge \sum_{k=0}^{m}(1-\epsilon)\frac{1}{k!} \\
&\ge (1-\epsilon)\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!},
\end{aligned}$$

also ist (3) und somit auch (1) und (2) bewiesen. Wir zeigen nun noch

$$c \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}. \tag{4}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!n^k}\frac{1}{k!} \le \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

da

$$\frac{n!}{(n-k)!n^k} = \prod_{j=0}^{k-1}\frac{n-j}{n} \le 1$$

für alle $0 \le k \le n$ in $\mathbb{N}_0$ gilt. (2) und (4) zusammen ergeben $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = c$.

Präsenzaufgabe 6.3 Es sei $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_n := f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge 2$. Die rekursiv definierte Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Fibonacci Folge. Für $n \in \mathbb{N}$, sei

$$s_n := \sum_{k=1}^{n}\frac{f_k}{2^k}.$$

Man zeige:

(a) Es gilt $s_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(b) $\lim_{n\to\infty} s_n = 2$,

(c) $\sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\} = 2$.

Beweis:

(a) Für $n > 1$ gilt

$$\begin{aligned}
s_n &= \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{f_{k-1}}{2^k} + \sum_{k=2}^{n} \frac{f_{k-2}}{2^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f_k}{2^k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f_{k-1}}{2^k} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f_k}{2^k} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n-1} \frac{f_{k-1}}{2^k} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f_k}{2^k} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-2} \frac{f_k}{2^k} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(s_n - \frac{f_n}{2^n}\right) + \frac{1}{4}\left(s_n - \frac{f_{n-1}}{2^{n-1}} - \frac{f_n}{2^n}\right)
\end{aligned}$$

und damit

$$s_n = 2 - \frac{f_{n-1}}{2^{n-1}} - 3\frac{f_n}{2^n} < 2. \tag{5}$$

da alle f_k's positiv sind.

(b) Da alle f_n positiv sind, ist die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend. Da sie nach (a) auch nach oben beschränkt ist, ist sie konvergent. Deshalb ist sie auch eine Cauchy-Folge, was insbesondere $s_{n+1} - s_n = \frac{f_{n+1}}{2^{n+1}} \to 0$ nach sich zieht. Die Rechenregeln für Folgen ergeben somit wegen $s_n = 2 - \frac{f_{n-1}}{2^{n-1}} - 3\frac{f_n}{2^n}$ die Konvergenz von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 2.

(c) Monoton wachsende und nach oben beschränkte Folgen konvergieren gegen das Supremum der Menge der Folgenglieder.
