Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

Analysis für Informatiker

7. Hausaufgabenblatt - Lösungen

Hausaufgabe 7.1 Man überprüfe die folgenden Reihen auf Konvergenz:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+17}{n^3+2n^2+n+1}$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^4}$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2^{-k}}{k^2-3k-1}$
4. $\sum_{k=52}^{\infty} (\sqrt[k]{k}-1)^k$
5. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k(\sqrt[k]{3}-1)$
6. $\sum_{k=3}^{\infty} \prod_{n=1}^{k} \frac{2n}{3n+2}$
7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{(k^2)}}{k!}$

Lösung:

1. Für $17 \leq n$ gilt

$$0 \leq \frac{n+17}{n^3+2n^2+n+1} \leq \frac{n+n}{n^3+2n^2+n+1} = 2\frac{n}{n^3+2n^2+n+1} \leq 2\frac{n}{n^3} = \frac{2}{n^2}.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ ist aber bekanntlich konvergent. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert demnach auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+17}{n^3+2n^2+n+1}$

2. Es gilt

$$\sqrt[k]{\frac{3^k}{k^4}} = \frac{3}{\sqrt[k]{k}^4} \to \frac{3}{1^4} = 3 > 1.$$

für $n \to \infty$. Nach dem Wurzelkriterium divergiert die Reihe.

3. Für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 4$ gilt $k^2 > k^2 - 3k - 1 > 0$ (Induktion über $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$), also folgt für eben diese k auch $\frac{1}{k^2-3k-1} > \frac{1}{k^2}$ und somit

$$\frac{k+2^{-k}}{k^2-3k-1} > \frac{k+2^{-k}}{k^2} > \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}.$$

Da die harmonische Reihe divergiert folgt die Divergenz der Reihe in 3. aus dem Minorantenkriterium.

4. Es gilt
$$\sqrt[k]{(\sqrt[k]{k}-1)^k} = \sqrt[k]{k}-1 \to 0 < 1$$
für $k \to \infty$. Demnach folgt die Konvergenz nach dem Wurzelkriterium.

5. Es gilt $\sqrt[k]{3}-1 \to 0$ für $k \to \infty$ und $\sqrt[k+1]{3}-1 < \sqrt[k]{3}-1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Konvergenz der Reihe folgt nun aus dem Leibnitzkriterium.

6. Es gilt
$$\frac{\prod_{n=1}^{k+1}\frac{2n}{3n+2}}{\prod_{n=1}^{k}\frac{2n}{3n+2}} = \frac{2(k+1)}{3(k+1)+2} \to \frac{2}{3} < 1$$
für $k \to \infty$. Demnach folgt die Konvergenz der Reihe aus dem Quotientenkriterium.

7. Es gilt $\frac{k^{(k^2)}}{k!} = \frac{(k^k)^k}{k!} \geq \frac{k^k}{k!} \geq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also divergiert die Reihe, da die Glieder der Reihe keine Nullfolge bilden.

Hausaufgabe 7.2 Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren und bestimmen Sie den Grenzwert.

1. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$ (Partialbruchzerlegung)
2. $\sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1}$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$.

   (Hinweis: Zeigen Sie per Induktion über $n \in \mathbb{N}$ die Identität
   $$\sum_{k=1}^{n} kz^{k-1} = \frac{1-(n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2}$$
   für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 1$.)

Lösung:

1. Es gilt $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und somit folgt für alle $n \in \mathbb{N}$
$$s_n := \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$
Nun gilt $s_n = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$ für $n \to \infty$, womit folgt $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = 1$.

2. Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 1$. Für $n = 1$ ergibt gilt
$$\sum_{k=1}^{1} kz^{k-1} = 1z^0 = 1 = \frac{(1-z)^2}{(1-z)^2} = \frac{1-2z+z^2}{(1-z)^2}.$$

Wir nehmen nun an, dass der Hinweis für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann folgt für $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} kz^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} kz^{k-1} + (n+1)z^n \\
&= \frac{1-(n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2} + \frac{(n+1)z^n(1-z)^2}{(1-z)^2} \\
&= \frac{1-(n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2} + \frac{(n+1)z^n(1-2z+z^2)}{(1-z)^2} \\
&= \frac{1-(n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2} + \frac{(n+1)z^n - 2(n+1)z^{n+1} + (n+1)z^{n+2}}{(1-z)^2} \\
&= \frac{1+(n-2(n+1))z^{n+1} + (n+1)z^{n+2}}{(1-z)^2} \\
&= \frac{1+(-n-2)z^{n+1} + (n+1)z^{n+2}}{(1-z)^2} \\
&= \frac{1-(n+2)z^{n+1} + (n+1)z^{n+2}}{(1-z)^2}.
\end{aligned}$$

Damit ist der Hinweis gezeigt.

Sei nun $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Dann gilt $(n+2)z^{n+1} \to 0$ und $(n+1)z^{n+2} \to 0$ für $n \to \infty$, denn

$$\left|\frac{(n+3)z^{n+2}}{(n+2)z^{n+1}}\right| = \frac{n+3}{n+2}|z| \to |z| < 1$$

und

$$\left|\frac{(n+2)z^{n+3}}{(n+1)z^{n+2}}\right| = \frac{n+2}{n+1}|z|^2 \to |z| < 1$$

für $n \to \infty$. Also konvergieren die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)z^{n+1}$ und $\sum_{j=1}^{\infty}(n+1)z^{n+2}$ womit die beiden Folgen Nullfolgen sein müssen. Da für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ insbesondere auch $z \neq 1$ gilt, folgt nach dem Hinweis und der Konvergenz der beiden genannten Folgen gegen Null für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$

$$\sum_{k=1}^{n} kz^{k-1} = \frac{1-(n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2} \to \frac{1-0+0}{(1-z)^2} = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

für $n \to \infty$.

Hausaufgabe 7.3 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Nullfolge. Zeigen Sie den *Verdichtungssatz von Cauchy*: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergent ist.

Beweis:

Es gilt

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k \leq 2^n a_{2^n} \leq 2 \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} a_k.$$

Es folgt

$$\sum_{k=2}^{2^N} a_k = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k \leq \sum_{n=0}^{N-1} 2^n a_{2^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{N} 2^n a_{2^n} \leq \sum_{n=1}^{N} 2 \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} a_k = 2 \sum_{k=2}^{2^N} a_k \leq 2 \sum_{k=2}^{\infty} a_k.$$

Die Aussage folgt jetzt aus dem Monotoniekriterium.

Abgabe der Hausaufgaben bis zum Sonntag den 10.12.2023, 23.59 Uhr in Panda.