Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

Analysis für Informatiker

7. Präsenzübungsblatt - Lösungen

Präsenzaufgabe 7.1 Berechnen Sie die Konvergenzradien folgender Potenzreihen:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{k^{k+1}} z^k,$

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} 3^k z^{3k},$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^{10}+k} z^k.$

(d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k^2}}{k+5} z^k$

(e) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k^2+(-1)^k}{k^2+2}\right)^k z^k$

Lösung: (a) Das Wurzelkriterium liefert

$$\sqrt[k]{\frac{2^{k-1}}{k^{k+1}}|z|^k} = \frac{2\frac{1}{\sqrt[k]{2}}}{k\sqrt[k]{k}}|z| \to 0 < 1$$

für $z \in \mathbb{C}$. Also ist der Konvergenzradius unendlich.
(b) Es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} 3^k z^{3k} = \sum_{k=0}^{\infty} 3^k (z^3)^k$ Substituieren von $z^3 = y$ liefert mit dem Wurzelkriterium $\sqrt[k]{3^k|y|^k} = 3|y| < (>) 1 \iff |y| < (>) \frac{1}{3} \iff |z| < (>) \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, also ist der Konvergenzradius $\sqrt[3]{3}^{-1}$.

(c) Es gilt

$$\left|\frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^{10}+k+1}z^{k+1}}{\frac{k!}{k^{10}+k}z^k}\right| = (k+1)\frac{k^{10}+k}{(k+1)^{10}+k+1}|z| \to \infty$$

für $k \to \infty$ und $|z| \neq 0$. Damit ist der Konvergenzradius 0.

(d) Für $k \geq 5$ gilt

$$\sqrt[k]{\frac{3^{k^2}}{k+5}}|z| \geq \frac{3^k}{\sqrt[k]{k+k}}|z| = \frac{3^k}{\sqrt[k]{2}\sqrt[k]{k}}|z| \to \frac{\infty}{1} = \infty.$$

für $z \neq 0$ und $k \to \infty$. Also ist der Konvergenzradius 0.

(e) Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\left|\frac{k^2+(-1)^k}{k^2+2}\right||z| \to |z|.$$

Also ist der Konvergenzradius 1, nach dem Wurzelkriterium.

Präsenzaufgabe 7.2

1. Zeigen Sie, dass für $s \in \mathbb{C}$ der Konvergenzradius der Binomialreihe

$$B_s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} z^k,$$

wobei $\binom{s}{k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{s-(j-1)}{j} = \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-k+1)}{k!}$, gleich 1 ist, falls $s \notin \mathbb{N}_0$ und unendlich ist für $s \in \mathbb{N}_0$.

2. Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und alle $s, t \in \mathbb{C}$ die Identität

$$B_{s+t}(z) = B_s(z) B_t(z)$$

gilt.

Hinweis: Laut Vorlesung hat eine nicht triviale komplexwertige Polynomfunktion höchstens endlich viele Nullstellen in $\mathbb{C}$ $(*)$, demnach ist eine komplexwertige Polynomfunktion eindeutig durch ihre Koeffizienten bestimmt $(**)$.

Beweisen Sie zuerst, dass

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \binom{t}{n-k} = \binom{s+t}{n}$$

für alle $s, t \in \mathbb{N}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes und $(**)$. Folgern Sie hieraus und aus $(*)$, dass bereits

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \binom{t}{n-k} = \binom{s+t}{n}$$

für alle $s, t \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gelten muss. Verwenden Sie anschließend das Cauchy-Produkt, um die Identität $B_{s+t}(z) = B_s(z) B_t(z)$ für alle $s, t \in \mathbb{C}$ und alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ herzuleiten.

3. Zeigen Sie, dass $B_s(z) \neq 0$ für alle $s \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$.

4. Zeigen Sie, dass $B_s(x) > 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

Beweis: 1. Für $s \in \mathbb{N}_0$ ist $\binom{n}{k} = 0$ für $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 1$ und die Reihe ist ein Polynom in z, hat also unendlichen Konvergenzradius. Ist $s \notin \mathbb{N}_0$, so ist $\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-k+1)}{k!} \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. In diesem Fall gilt

$$\left| \frac{\frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-k)}{(k+1)!} z^{k+1}}{\frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-k+1)}{k!} z^k} \right| = \left| \frac{s-k}{k+1} \right| |z| \to |z|$$

für $k \to \infty$. Also ist der Konvergenzradius gleich 1 im Fall $s \notin \mathbb{N}_0$.

2. Wir beweisen zuerst den Hinweis. Für $s, t \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt nach dem binomischen Lehrsatz und dem Cauchy Produkt für Reihen für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{s+t} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \binom{t}{n-k} \right) z^n &= \left(\sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} z^k \right) \left(\sum_{l=0}^{s} \binom{t}{l} z^l \right) \\
&= (1+z)^s (1+z)^t \\
&= (1+z)^{s+t} \\
&= \sum_{n=0}^{s+t} \binom{s+t}{n} z^n.
\end{aligned}$$

Mit $(**)$ folgt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \binom{t}{n-k} = \binom{s+t}{n}$$

für alle $s, t \in \mathbb{N}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$. Sei nun $t \in \mathbb{N}$ fixiert. Dann sind sowohl $s \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k}\binom{t}{n-k}$, als auch $s \mapsto \binom{s+t}{n}$ komplexwertige Polynomfunktionen in der komplexen Variable s. Die Differenz ist ebenfalls eine komplexwertige Polynomfunktion und verschwindet für alle s in $\mathbb{N}$. Nach $(*)$ muss die Differenz also gleich Null sein, womit

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \binom{t}{n-k} = \binom{s+t}{n}$$

für alle $s \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ folgt. Sei nun $s \in \mathbb{C}$ fix. Dann sind $t \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k}\binom{t}{n-k}$, als auch $t \mapsto \binom{s+t}{n}$ wieder komplexwertige Polynomfunktionen, deren Differenz bei allen $t \in \mathbb{N}$ verschwindet. Wieder nach $(*)$ folgt demnach

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \binom{t}{n-k} = \binom{s+t}{n}$$

für alle $s, t \in \mathbb{C}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Nach der Cauchyprodukt Formel und dem so eben gezeigten Hinweis folgt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und alle $s, t \in \mathbb{C}$, dass

$$\begin{aligned}
B_s(z) B_t(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} z^k \sum_{k=0}^{\infty} \binom{t}{k} z^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \binom{t}{n-k} \right) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s+t}{n} z^n \\
&= B_{s+t}(z).
\end{aligned}$$

3. Es gilt $B_0(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Nach 2. gilt $1 = B_0(z) = B_{s+(-s)}(z) = B_s(z) B_{-s}(z)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ und alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Somit muss $B_s(z) \neq 0$ (und $B_s(z)^{-1} = B_{-s}(z)$) gelten für alle $s \in \mathbb{C}$ und alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$.

4. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $|x| < 1$ und $s \in \mathbb{R}$. Da die Binomialreihe konvergiert und alle Summanden im Falle von $x, s \in \mathbb{R}$ reell sind, muss auch $B_s(x) \in \mathbb{R}$ gelten. Nach 2. gilt aber $B_s(x) = B_{s/2}(x) B_{s/2}(x)$, womit $B_s(x) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ folgt. Nach 3. gilt sogar $B_s(x) > 0$.

Präsenzaufgabe 7.3

1. Berechnen Sie die Eulerdarstellungen der komplexen Zahlen $1+i$ und $-2+2i$.
2. Berechnen Sie die Eulerdarstellung des Produkts von $1+i$ und $-2+2i$.
3. Finden Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^6 = 1$.
4. Zeichnen Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} : z^5 = 32\}$

Lösung: 1 und 2. Es gilt $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $-2+2i = \sqrt{8}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ und somit $(1+i)(-2+2i) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{8}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\sqrt{8}e^{\imath(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4})} = 4e^{i\pi}$.

3. $\mathcal{L} = \{e^{2\pi i\frac{k}{6}} : k = 0, \ldots, 5\}$.

4. siehe PÜ.

Präsenzaufgabe 7.4 Zeigen Sie die Identität

$$\cos(\phi)^4 = \frac{1}{8}\cos(4\phi) + \frac{1}{2}\cos(2\phi) + \frac{3}{8}$$

für alle $\phi \in \mathbb{R}$.

Lösung:
Es gilt $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit folgt für alle $x \in \mathbb{R}$ nach dem binomischen Lehrsatz

$$\begin{aligned}
\cos(x)^4 &= \frac{1}{16}(e^{ix}+e^{-ix})^4 \\
&= \frac{1}{16}(1(e^{ix})^4(e^{-ix})^0 + 4(e^{ix})^3(e^{-ix})^1 + 6(e^{ix})^2(e^{-ix})^2 + 4(e^{ix})^1(e^{-ix})^3 + 1(e^{ix})^0(e^{-ix})^4) \\
&= \frac{1}{16}(e^{4ix} + e^{-4ix} + 4e^{2ix} + 4e^{-2ix} + 6) \\
&= \frac{1}{8}\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{2} + \frac{1}{2}\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2} + \frac{6}{16} \\
&= \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$
