Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

Analysis für Informatiker

8. Hausaufgabenblatt - Lösungen

Hausaufgabe 8.1 Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

(a) $\displaystyle\sum_{n=k+1}^{\infty} \binom{n}{k} z^n$ für $k \in \mathbb{N}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{3k+1}\right) z^n$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n+3} z^n$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^3+2+(-1)^n}{n^3+3}\right)^n z^n$.

(e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k! z^k$

Lösung:

(a): Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}}|z| = \frac{n+1}{n+1-k}|z| \to |z|$$

also ist der Konvergenzradius 1.

(b) Es gilt

$$\frac{\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k}{3k+1}}{\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{3k+1}}|z| = \frac{2(n+1)}{3(n+1)+1}|z| \to \frac{2}{3}|z|$$

also ist der Konvergenzradius $\frac{3}{2}$.

(c) Es ist

$$\sqrt[n]{\frac{2^{n^2}}{n+3}}|z| = \frac{2^n}{\sqrt[n]{n+3}}|z| \to \infty$$

für $z \neq 0$, also ist der Konvergenzradius 0.

(d) Es gilt

$$\left|\frac{n^3+2+(-1)^n}{n^3+3}\right||z| \to |z|$$

für $z \in \mathbb{C}$, also ist der Konvergenzradius 1.

(e) Es gilt

$$\frac{(k+1)!}{k!}|z| = (k+1)|z| \to \infty$$

für $z \neq 0$, also ist der Konvergenzradius Null.

Hausaufgabe 8.2 Für $s \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$, sei $B_s(z)$ die Binomialreihe

$$B_s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} z^k,$$

wobei $\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-k+1)}{k!}$, aus Präsenzaufgabe 7.2.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $s \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$

$$B_s(x) = (1+x)^s$$

gilt (Hinweis: Verwenden Sie Präsenzaufgabe 7.2.2 und 7.2.4) .

(b) Berechnen Sie die ersten 5 Summanden der Potenzreihe für $\sqrt{1+x} = B_{\frac{1}{2}}(x)$.

Beweis:

Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt nach dem binomischen Lehrsatz

$$B_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} z^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} z^k = (1+z)^n.$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Nach PA 7.2.2 gilt $B_s(z)B_t(z) = B_{s+t}(z)$ für alle $s, t \in \mathbb{C}$ und alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Demnach folgt $B_s(z)B_{-s}(z) = B_0(z) = 1$ und somit $B_s(z) \neq 0$ und $B_s(z)^{-1} = B_{-s}(z)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ und alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Ist nun $n \in \mathbb{N}$ so folgt

$$(1+z)^{-n} = ((1+z)^n)^{-1} = B_n(z)^{-1} = B_{-n}(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$, also insgesamt

$$(1+z)^n = B_n(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und alle $n \in \mathbb{Z}$. Sei nun $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$. Dann gilt für $k \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$

$$B_{\frac{k}{m}}(x)^m = B_{m\frac{k}{m}}(x) = B_k(x) = (1+x)^k.$$

Da $|x| < 1$ und da nach 7.2.4 $B_s(x) \in \mathbb{R}_{>0}$ für alle $s \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt, muss nach der Eindeutigkeit von m-ten positiven Wurzeln

$$B_{\frac{k}{m}}(x) = (1+x)^{\frac{k}{m}}$$

gelten. Damit ist (a) gezeigt.

(b) Es gilt $\sum_{k=0}^{4} \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4$.

Hausaufgabe 8.3

1. Berechnen Sie die Eulerdarstellungen der komplexen Zahlen $2-2i$ und $\frac{1}{3}i$ und die des Produkts $(2-2i)\frac{1}{3}i$.

2. Geben Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^{13} = 8192$ in deren Eulerdarstellungen an.

3. Zeichnen Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} : z^3 = 125\}$.

Lösung:

1. $2-2i = \sqrt{8}e^{i\frac{7\pi}{4}}$, $\frac{1}{3}i = \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ und $(2-2i)\frac{1}{3}i = \frac{\sqrt{8}}{3}e^{i\frac{9\pi}{4}} = \frac{\sqrt{8}}{3}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
2. Es gilt $2^{13} = 8192$, womit die Lösungen gegeben sind durch

$$\{2e^{2\pi i\frac{k}{13}} : k \in \{0,\dots,12\}\}.$$

3. Siehe PÜ 7.3.3.

Hausaufgabe 8.4 Zeigen Sie die Identität

$$\sin(x)^3 = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis:

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ und nach dem binomischen Lehrsatz

$$\begin{aligned}
\sin(x)^3 &= \frac{1}{8(-i)}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \\
&= \frac{1}{8(-i)}(1(e^{ix})^3(-e^{-ix})^0 + 3(e^{ix})^2(-e^{-ix})^1 + 3(e^{ix})^1(-e^{-ix})^2 + 1(e^{ix})^0(-e^{-ix})^3) \\
&= \frac{1}{8(-i)}(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}) \\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i}\right) \\
&= \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x).
\end{aligned}$$

Abgabe der Hausaufgaben bis zum Sonntag den 17.12.2023, 23.59 Uhr in Panda.