Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Analysis für Informatiker

8. Präsenzübungsblatt - Lösungen

Präsenzaufgabe 8.1 Welche der angegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzen eine konvergente Teilfolge und welche nicht? Begründen Sie ihre Antwort.

(a) $a_n = \frac{i(n+n^2)}{n^2-i}$

(b) $a_n = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$

(c) $a_n = \sqrt{n}$

(d) $a_n = \left(e^{2\pi i\sqrt{2}}\right)^n$.

Lösungen: (a) $a_n = \frac{i\frac{1}{n}+i}{1-\frac{i}{n^2}} \to i$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also selbst bereits konvergent.

(b). Es gilt $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = i$ und somit $a_{8n} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, womit wir eine konvergente Teilfolge gefunden haben. Man hätte auch mit Hilfe von Bolzano-Weierstraß und der Beschränktheit der gegebenen Folge (durch 1) argumentieren können.

(c). Die angegebene Folge ist monoton steigend und nach oben unbeschränkt. Wir behaupten, dass dann auch jede Teilfolge (monoton steigend und) unbeschränkt ist, womit $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge besitzen kann. Sei hierfür $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge. Angenommen die Teilfolge wäre beschränkt. Dann gilt $0 < a_{n_k} \leq C$ für ein $C > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Da a_n unbeschränkt ist, existiert ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $a_m > C$. Sei $l \in \mathbb{N}$ so groß, dass $n_l > m$. Dann gilt $C < a_m \leq a_{n_l}$ da a_n monoton steigend ist. Widerspruch! Dementsprechend ist jede Teilfolge unbeschränkt.

(d) Es gilt $\left|\left(e^{2\pi i\sqrt{2}}\right)^n\right| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit besitzt die Folge nach Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge.

Präsenzaufgabe 8.2 Für $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, versteht man unter einem b-adischen Bruch eine Reihe der Gestalt

$$\pm \sum_{n=-\infty}^{k} a_n b^n.$$

Hierbei ist $k \geq 0$ und die a_n sind ganze Zahlen mit $0 \leq a_n < b$. Schreibweise: $a_k a_{k-1} \ldots a_0.a_{-1}a_{-2} \ldots$.

(a) Man zeige: Jeder b-adische Bruch stellt eine Cauchy-Folge dar, konvergiert also gegen eine reelle Zahl.

(b) Man zeige: Jede reelle Zahl läßt sich in einen b-adischen Bruch entwickeln, das heißt zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es für jedes $n \in \mathbb{Z}_{\leq k}$ ein $a_n \in \{0, \ldots, b-1\}$ mit $x = \sum_{n=-\infty}^{k} a_n b^n$.

(c) Man entwickle $x = \frac{1}{7}$ in einen b-adischen Bruch für $b = 2$.

Beweis:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{k} |a_n b^n| &= \sum_{n=1}^{k} |a_n b^n| + \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{b^n}| \\ &\leq \sum_{n=1}^{k} |a_n b^n| + \sum_{n=0}^{\infty} b \left|\frac{1}{b^n}\right| \\ &= \sum_{n=1}^{k} |a_n b^n| + \frac{b}{1-\frac{1}{b}} < \infty\end{aligned}$$

da $0 < 1/b < 1$ für $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$ und nach der Konvergenz der geometrischen Reihe, also konvergiert die Reihe des b-adischen Bruchs.

(b) Für $x \in \mathbb{N}_0$ wurde die Existenz einer derartigen Reihendarstellung von x bereits in PA 2.1 gezeigt. Es reicht demnach zu zeigen, dass jedes $y \in [0,1)$ eine Darstellung der Form $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n b^n$ mit $a_n \in \{0,\ldots,b-1\}$ besitzt. Sei also $y \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq y < 1$. Dann existiert ein eindeutiges $a_{-1} \in \{0,\ldots,b-1\}$ mit $y \in [\frac{a_{-1}}{b}, \frac{a_{-1}+1}{b})$. Dann gilt $y - a_{-1}\frac{1}{b} \in [0, 1/b)$. Da für $n \in \mathbb{N}$

$$[0, 1/b^n) = \dot{\bigcup}_{j=0}^{b-1} \left[\frac{j}{b^{n+1}}, \frac{j+1}{b^{n+1}}\right)$$

gilt, folgt induktiv für $n \in \mathbb{N}$ die Existenz eines $a_{-(n+1)} \in \{0,\ldots,b-1\}$, sodass $y - \sum_{m=-n}^{-1} a_j b^j - a_{-(n+1)}\frac{1}{b^{n+1}} \in [0, 1/b^{n+1})$. Per Konstruktion gilt dann $y = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n b^n$ und (b) ist bewiesen.

(c) Sei $k = 0$ und $a_{-n} = 1$ falls $n \in 3\mathbb{N}$ und Null sonst. Dann gilt $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-3n}\frac{1}{2^{3n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3n}} - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{8}} - 1 = \frac{1}{7}$.

Präsenzaufgabe 8.3
Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen stetig in $x = 0$ sind:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

2. $f : (-1,\infty) \to \mathbb{C}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}\left(\frac{1}{x+1} - 1\right)^2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Beweis: 1. Es gilt $|\sin(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Sei x_n eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \to 0$. Wir müssen zeigen, dass dann $f(x_n) \to f(x_0) = 0$ gilt. O.B.d.A sei $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$|f(x_n)| = |x_n||\sin(1/x_n)| \leq |x_n| \to 0.$$

Also ist f folgenstetig in der Null. Nach dem Satz in der Vorlesung ist f auch stetig in 0. Mit dem ϵ-δ Kriterium für Stetigkeit läuft der Beweis folgendermaßen: Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Sei $\delta = \epsilon$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $|x| < \delta$

$$|f(x) - f(0)| = |f(x) - 0| = |f(x)| = |x||\sin(1/x)| \leq |x| < \delta = \epsilon$$

Also ist f stetig in 0.

2. Für $x \neq 0$ gilt

$$\frac{1}{|x|}\left(\frac{1}{x+1}-1\right)^2 = \frac{1}{|x|}\left(\frac{1-x-1}{x+1}\right)^2 = \frac{1}{|x|}\left(\frac{-x}{x+1}\right)^2 = \frac{1}{|x|}\frac{|x|^2}{(x+1)^2} = \frac{|x|}{(1+x)^2}.$$

Da $f(0) = 0$ gilt also sogar $g(x) = \frac{|x|}{(1+x)^2}$ für alle $x \in (-1, \infty)$. Diese Funktion ist aber stetig auf $(-1, \infty)$, da sowohl $|x|$ als auch $\frac{1}{(x+1)^2}$ stetig auf $(-1, \infty)$ sind.

Präsenzaufgabe 8.4 Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\chi_{[0,1]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \chi_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

nicht stetig ist. In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist $\chi_{[0,1]}$ stetig/folgenstetig und in welchen nicht?

Lösung: Die Einschränkung von $\chi_{[0,1]}$ auf $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ ist konstant Null, also stetig. Die Einschränkung auf $(0, 1)$ ist konstant 1, also dort ebenfalls stetig. Es gilt $\chi_{[0,1]}(-1/n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit $\lim_{n\to\infty} \chi_{[0,1]}(-1/n) = 0 \neq 1 = \chi_{[0,1]}(0)$. Also ist $\chi_{[0,1]}$ nicht folgenstetig in $x = 0$. Analog gilt $\lim_{n\to\infty} \chi_{[0,1]}(1 + 1/n) = 0 \neq 1 = \chi_{[0,1]}(1)$. Also ist $\chi_{[0,1]}$ auch in 1 nicht folgenstetig. Stetigkeit und Folgenstetigkeit sind nach einem Satz in der Vorlesung äquivalent.

Nichtstetigkeit von χ in 0 und 1 via der $\epsilon - \delta$ Definition. Sei $\epsilon = \frac{1}{2}$. Dann gilt für jedes $\delta > 0$, dass $x_\delta := -\delta/2$ die Ungleichungen $|x_\delta - 0| = |x_\delta| = \delta/2 < \delta$ und

$$|\chi(x_\delta) - \chi(0) = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2} = \epsilon$$

erfüllt. Also ist χ nicht stetig in 0. χ ist nicht stetig in 1, da für $\epsilon = \frac{1}{2}$ und jedes $\delta > 0$, die Zahl $x_\delta := 1 + \delta/2$ die Ungleichungen $|x_\delta - 1| = |1 + \delta/2 - 1| = \delta/2 < \delta$ und

$$|\chi(x_\delta) - \chi(1) = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2} = \epsilon$$

erfüllt. Also ist f auch nicht stetig in $x = 1$.