Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

# Analysis für Informatiker

## 9. Hausaufgabenblatt - Lösungen

**Hausaufgabe 9.1** Welche der angegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzen eine konvergente Teilfolge und welche nicht? Begründen Sie ihre Antwort.

(a) $a_n = \sqrt[n]{n!}$ (Hinweis: Zeigen Sie, dass $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, indem Sie $n!^2 \geq n^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ beweisen.)

(b) $a_n = \frac{ne^{i\pi n}+e^{i\sqrt{n}}}{2n+1}$

(c) $a_n = \begin{cases} n! & \text{falls } n = 2^m \text{ für ein } m \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(d) $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$

**Lösung:**(a). Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$n!^2 = \prod_{j=1}^{n} j \prod_{j=1}^{n} j = \prod_{j=0}^{n-1}(j+1)\prod_{j=0}^{n-1}(n-j) = \prod_{j=0}^{n-1}\left((j+1)(n-j)\right).$$

Für $j \in \mathbb{N}_0$ gilt aber

$(j+1)(n-j) = n - j^2 + (n-1)j \geq n \iff (n-1)j \geq j^2 \iff j \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Somit gilt $n!^2 \geq n^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also auch $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ strikt monoton steigend und unbeschränkt ist, zeigt diese Abschätzung, dass jede Teilfolge von $(\sqrt[n]{n!})_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben unbeschränkt und somit nicht konvergent ist.

(b) Es gilt $a_{2n} = \frac{2ne^{i\pi 2n}+e^{i\sqrt{2n}}}{4n+1} = \frac{2n}{4n+1} + \frac{e^{i\sqrt{2n}}}{4n+1} \to \frac{2}{4} + 0$ da $|e^{ix}| = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also haben wir eine konvergente Teilfolge gefunden. Man hätte auch einfach mit Bolzano-Weierstraß argumentieren können.

(c) Es gilt $a_{2n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da $2^m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gerade ist.

(d) Die Folge konvergiert gegen eins, da

$$1 \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1.$$

Damit konvergiert jede Teilfolge gegen 1.

**Hausaufgabe 9.2** Die Funktionen Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus sind definiert durch

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{C}; \qquad z \mapsto \sinh(z) := \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right),$$
$$\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{C}; \qquad z \mapsto \cosh(z) := \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right).$$

(a) Beweisen Sie, dass sin,cos,sinh und cosh stetig sind.

(b) Ermittlen Sie Potenzreihendarstellungen für der Funktionen sinh und cosh

(c) Zeigen Sie, dass sinh die Menge $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ abbildet. (Hinweis: Geeignete Substitution verwenden)

(d) Beweisen Sie für $z \in \mathbb{R}$, dass

$$\sin(z)^2 + \cos(z)^2 = 1$$

und

$$\cosh(z)^2 - \sinh(z)^2 = 1.$$

(e) Skizzieren Sie die Graphen der (reellen) Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sinh(x)$ und $x \mapsto \cosh(x)$.

**Beweis:**

(a) Folgt sofort aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion, da alle 4 Funktionen einfache Kompositionen und Summen der Exponentialfunktion sind.

(b) Weil $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, gilt

$$\begin{aligned}
\cosh(x) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \\
\sinh(x) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.
\end{aligned}$$

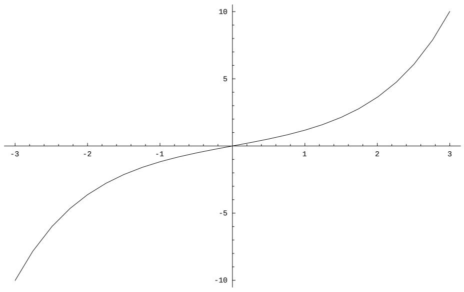
(c) Sei $u = e^x$ und $y = \sinh(x)$. Es gilt $2y = u - \frac{1}{u}$ und damit $u^2 - 2uy - 1 = 0$. Diese Gleichung hat die Lösungen $u = y \pm \sqrt{y^2+1}$. Weil $u \geq 0$, gilt $u = y + \sqrt{y^2+1}$. Wenn $y = \sinh(x)$ folgt, dass $x = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$. Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$ ist eine Umkehrfunktion von sinh. Dies beweist, dass sinh eine Bijektion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist.

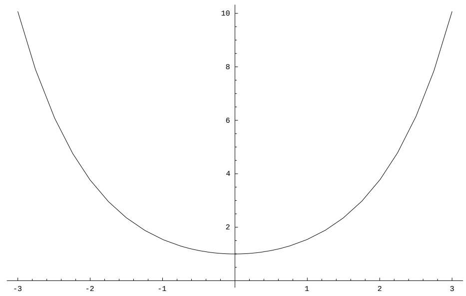
(d) Es gilt

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = \frac{1}{4}\left((e^{2z} + 2 + e^{-2z}) - (e^{2z} - 2 + e^{-2z})\right) = 1.$$

und

$$\begin{aligned}
\sin(z)^2 + \cos(z)^2 &= -\frac{1}{4}(e^{ix} - e^{-ix})^2 + \frac{1}{4}(e^{ix} + e^{-ix})^2 \\
&= \frac{1}{4}\left((e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}) - (e^{2ix} - 2 + e^{-2ix})\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$





(e) sinh cosh

**Hausaufgabe 9.3** Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} (e^{|x|} - 1) \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

stetig ist.

**Beweis:** $x \mapsto |x|$, exp und cos sind stetige Funktionen, $x \mapsto 1/x^2$ ist stetig in $R \setminus \{0\}$, also ist $f$ stetig in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ist $x_n$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$|f(x_n)| = |e^{|x_n|} - 1||\cos(1/x_n^2)| \leq |e^{|x_n|} - 1| \to 0$$

für $n \to \infty$, da exp stetig in Null ist mit $\exp(0) = 1$, also ist $f$ folgenstetig und somit auch stetig in $x = 0$.

**Hausaufgabe 9.4** Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

für jedes $a \in \mathbb{R}$ nicht stetig ist.
**Beweis:** Sei $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $e^{1/x_n^2} = e^n = (e)^n \to \infty$ für $n \to \infty$. Somit kann $f_a$ für kein $a \in \mathbb{R}$ folgenstetig, also auch nicht stetig in 0 sein.

---

Abgabe der Hausaufgaben bis zum Samstag den 23.12.2023, 23.59 Uhr in Panda.