Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

Analysis für Informatiker

9. Präsenzübungsblatt - Lösungen

Präsenzaufgabe 9.1

1. Zeigen Sie, dass für alle $x \in [0,2]$
$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$
gilt.

2. Schließen Sie aus 1. , dass $\sin(x) > 0$ für alle $x \in (0,2)$ gilt.

3. Zeigen Sie die Identität
$$\cos(z) - \cos(w) = -\sin\left(\frac{z+w}{2}\right)\sin\left(\frac{z-w}{2}\right)$$
für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

4. Zeigen Sie, dass cos im Intervall $(0,2)$ strikt monoton fallend ist.

5. Zeigen Sie, dass für alle $x \in [0,2]$
$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$
gilt.

6. Zeigen Sie, dass cos im Intervall $[0,2]$ genau eine Nullstelle besitzt. Wir bezeichnen diese Nullstelle mit $\frac{\pi}{2}$.

7. Zeigen Sie, dass für jedes $u \in (0,1]$ genau ein $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ existiert, sodass $u = \cos(x)$ gilt.

8. Zeigen Sie, dass für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ und $\mathrm{Re}(z) > 0$ und $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ genau ein $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ existiert mit $e^{ix} = z$.

9. Folgern Sie die Identität
$$\{e^{ix} : x \in [0, 2\pi)\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$
(wobei $2\pi = 4\frac{\pi}{2}$). Zeigen Sie zusätzlich, dass für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ **genau** ein $x \in [0, 2\pi)$ mit $e^{ix} = z$ existiert.

Beweis:

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dementsprechend gilt

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} = x - \frac{x^3}{6} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{x^{4j+1}}{(4j+1)!} - \frac{x^{4j+3}}{(4j+3)!}\right)$$

und

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \sum_{j=3}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{x^{4j+5}}{(4j+5)!} - \frac{x^{4j+3}}{(4j+3)!} \right).$$

für $x \in [0, 2)$ und $j \in \mathbb{N}$ gilt aber

$$\left(\frac{x^{4j+1}}{(4j+1)!} - \frac{x^{4j+3}}{(4j+3)!} \right) \geq 0$$

und

$$\left(\frac{x^{4j+5}}{(4j+5)!} - \frac{x^{4j+3}}{(4j+3)!} \right) \leq 0$$

wie man leicht verifiziert, womit 1. sofort folgt.

2. Für $x > 0$ gilt

$$x - \frac{x^3}{6} > 0 \iff x(1 - \frac{x^2}{6}) > 0 \iff 1 - \frac{x^2}{6} > 0 \iff 6 > x^2 \iff x < \sqrt{6}.$$

Da $2 < \sqrt{6}$ folgt 2. aus 1.

3. Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} -\sin\left(\frac{z+w}{2}\right)\sin\left(\frac{z-w}{2}\right) &= -\frac{e^{i\frac{z+w}{2}} - e^{-i\frac{z+w}{2}}}{2i} \frac{e^{i\frac{z-w}{2}} - e^{-i\frac{z-w}{2}}}{2i} \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{i\frac{z+w}{2}}e^{i\frac{z-w}{2}} - e^{i\frac{z+w}{2}}e^{-i\frac{z-w}{2}} - e^{-i\frac{z+w}{2}}e^{i\frac{z-w}{2}} + e^{-i\frac{z+w}{2}}e^{-i\frac{z-w}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{4}(e^{iz} - e^{iw} - e^{-iw} + e^{-iz}) \\ &= \cos(z) - \cos(w). \end{aligned}$$

4. Seien $x, y \in (0, 2)$ mit $x < y$. Dann gilt $\frac{y+x}{2}, \frac{y-x}{2} \in (0, 2)$ und somit nach 2. $\sin\left(\frac{y+x}{2}\right) > 0$ und $\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)$. Damit folgt aber

$$\cos(y) - \cos(x) = -\sin\left(\frac{y+x}{2}\right)\sin\left(\frac{y-x}{2}\right) < 0.$$

und also ist cos strikt monoton fallend auf $(0, 2)$.

5. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\cos(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} x^{2j}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dementsprechend gilt

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} x^{2j} = 1 - \frac{x^2}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{x^{4j}}{(4j)!} - \frac{x^{4j+2}}{(4j+2)!} \right)$$

und

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \sum_{j=3}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} x^{2j} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{x^{4j+4}}{(4j+4)!} - \frac{x^{4j+2}}{(4j+2)!} \right).$$

für $x \in [0, 2)$ und $j \in \mathbb{N}$ gilt aber

$$\left(\frac{x^{4j}}{(4j)!} - \frac{x^{4j+2}}{(4j+2)!} \right) > 0$$

und

$$\left(\frac{x^{4j+4}}{(4j+4)!} - \frac{x^{4j+2}}{(4j+2)!}\right) < 0$$

wie man leicht verifiziert, womit 5. sofort folgt.
6. Es gilt $\cos(0) = 1$ und nach 4. $\cos(2) \leq 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{24} = 1 - 2 + \frac{16}{24} = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$. Da cos stetig ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle von cos in $(0, 2)$. Da cos **strikt** monoton fallend in $(0, 2)$ ist, ist diese Nullstelle die einzige Nullstelle in $[0, 2]$. Wir nennen diese Nullstelle $\pi/2$.

7. Da $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$ und cos stetig und strikt monoton fallend auf $(0, \pi/2)$ ist, folgt $\cos([0, \pi/2)) = (0, 1]$. Da cos auf $[0, 2]$ und somit auch auf $[0, \pi/2]$ strikt monoton fallend ist, ist cos dort auch injektiv. Damit folgt 7.

8. Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ und $z = u + iv$ mit $u \in \mathbb{R}_{>0}, v \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann ist $0 < u = \sqrt{u^2} \leq \sqrt{u^2 + v^2} = |z| = 1$. Also existiert ein eindeutiges $x \in [0, \pi/2)$ mit $u = \cos(x)$. Wegen $|z| = 1$ gilt $1 > v = \sqrt{1 - u^2} = \sqrt{1 - \cos(x)^2} = \sqrt{\sin(x)^2} = \sin(x)$ nach PA 9.1.2. Somit folgt $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) = u + iv = z$. Angenommen es gibt ein weiteres $x' \in [0, \pi/2)$ mit $e^{ix'} = z = e^{ix}$. Dann gilt $\cos(x') = \cos(x)$ und somit nach 7. $x' = x$.

9. Die Inklusion $\{e^{ix} : x \in [0, 2\pi)\} \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ist offensichtlich. Sei $z \in \mathbb{C}$. $|z| = 1$. Falls $\mathrm{Re}(z) > 0, \mathrm{Im}(z) \geq 0$ so gibt es ein eindeutiges $x \in [0, \pi/2)$ mit $e^{ix} = z$. Sei nun $\mathrm{Re}(z) \leq 0$ oder $\mathrm{Im}(z) < 0$. Dann existiert ein eindeutiges $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, sodass $e^{-ik\frac{\pi}{2}} z$ strikt positiven Realteil und nicht negativen Imaginärteil hat. Nach 8 existiert ein eindeutiges $x \in [0, \pi/2)$ mit $e^{ix} = e^{-ik\frac{\pi}{2}} z$. Damit gilt aber $e^{i(x+k\frac{\pi}{2})} = z$. Offensichtlich gilt $x + k\frac{\pi}{2} \in [0, 2\pi)$ für $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Die Eindeutigkeit wurde im Beweis gezeigt. Damit folgt 9.

Präsenzaufgabe 9.2 Welche der folgenden (eigentlichen oder uneigentlichen) Grenzwerte existieren und welche nicht? Geben Sie den Grenzwert an, falls er existiert.

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x^2}$ (Hinweis: Verwenden Sie zum Beispiel Präsenzaufgabe 9.1.5)
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}}$
3. $\lim_{x\uparrow 0} e^{i\frac{1}{x}}, \lim_{x\downarrow 0} e^{i\frac{1}{x}}, \lim_{x\to 0} e^{i\frac{1}{x}}$
4. $\lim_{x\uparrow 1} f(x), \lim_{x\downarrow 1} f(x), \lim_{x\to 1} f(x)$, wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x < 1$ und $f(x) = 1$ für $x \geq 1$.
5. $\lim_{x\uparrow 0} g(x), \lim_{x\downarrow 0} g(x), \lim_{x\to 0} g(x)$, wobei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{x}}{x} & x > 0 \end{cases}$
6. $\lim_{x\uparrow 1} \frac{x}{x^2-1}, \lim_{x\downarrow 1} \frac{x}{x^2-1}, \lim_{x\to 1} \frac{x}{x^2-1}$
7. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$
8. $\lim_{x\to\pm\infty} x^3 + x^2 + 1$
9. $\lim_{x\to\pm\infty} \cos(x)$
10. $\lim_{x\to\pm\infty} x\cos(x)$

Lösung: Nach PA. 9.1.5. gilt

$$1-\frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

für alle $x \in [0,2]$. Da $\cos(x)=\cos(-x)$ gilt obige Ungleichung für alle $x \in [-2,2]$. Für $x \in [-2,2]\setminus\{0\}$ ergibt sich aus obiger Ungleichungen

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{\cos(x)-1}{x^2} \leq -\frac{1}{2}+\frac{x^2}{24},$$

was äquivalent zu

$$0 \leq \frac{\cos(x)-1}{x^2}-\left(-\frac{1}{2}\right) \leq \frac{x^2}{24},$$

für $x \in [-2,2]\setminus\{0\}$ ist.

Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ und o.B.d.A $|x_n| \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt nach obiger Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \frac{\cos(x_n)-1}{x_n^2}-\left(-\frac{1}{2}\right) \leq \frac{x_n^2}{24} \to 0,$$

für $n \to \infty$. Also gilt $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$. Damit existieren natürlich auch der linksseitige und rechtsseite Grenzwert bei $x=0$ und beide sind ebenfalls $-\frac{1}{2}$.

2. Für $x \geq 0$ gilt $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > x$ und somit $e^{-x} = \frac{1}{e^x} < \frac{1}{x}$ für alle $x > 0$. Sei nun $x \neq 0$ Dann folgt

$$\left|\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}}-0\right| = \frac{1}{|x|}e^{-\frac{1}{x^2}} \leq \frac{1}{|x|}\frac{1}{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{|x|}x^2 = |x|.$$

Ist nun $\epsilon > 0$ und $\delta := \epsilon$ so gilt nach obiger Ungleichung für alle $x \neq 0$ mit $|x-0| = |x| < \delta$ die Abschätzung

$$\left|\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}}-0\right| < \delta = \epsilon.$$

Nach dem $\epsilon-\delta$-Kriterium gilt $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$.

Beweis via Folgendefinition: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, so folgt nach obiger Abschätzung

$$\left|\frac{1}{x_n}e^{-\frac{1}{x_n^2}}-0\right| \leq |x_n| \to 0$$

für $n \to \infty$ da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Somit gilt nach der Folgendefinition ebenfalls $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$.

3. Sei $x_n := \frac{1}{\pi n}$ und $y_n = -\frac{1}{\pi n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$e^{i\frac{1}{x_n}} = \begin{cases} 1 & n \in 2\mathbb{N} \\ -1 & n \in 2\mathbb{N}_0+1 \end{cases}$$

und

$$e^{i\frac{1}{y_n}} = \begin{cases} 1 & n \in 2\mathbb{N} \\ -1 & n \in 2\mathbb{N}_0+1 \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, Da $x_n, y_n \to 0$ für $n \to \infty$ und $y_n < 0, x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, existieren weder $\lim_{x\uparrow 0} e^{i\frac{1}{x}}$ noch $\lim_{x\downarrow 0} e^{i\frac{1}{x}}$, also existiert auch $\lim_{x\to 0} e^{i\frac{1}{x}}$ nicht.

4. Ist $x_n < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \to 0$, so folgt $f(x_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also insbesondere $f(x_n) \to 0$ für $n \to \infty$. Somit gilt $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = 0$. Ist $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \to 0$, so folgt $f(x_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also insbesondere $f(x_n) \to 1$ für $n \to \infty$. Somit gilt $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = 1$. Sei $y_n := (-1)^n \frac{1}{n}$. gilt $f(y_n) = 0$ für n ungerade und $f(y_n) = 1$ für n gerade. Also konvergiert die Folge $f(y_n)$ nicht, womit $\lim_{x\to 0} f(x)$ per Definition nicht existiert. (oder einfach aus dem Grund, da linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert nicht übereinstimmen!)

5. Analog zu 4. gilt offensichtlich $\lim_{x\uparrow 0} g(x) = 0$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt $g(x_n) = \frac{1}{x_n}\sqrt{x_n} = \sqrt{\frac{1}{x_n}} \to \infty$ für $n \to \infty$, das $\frac{1}{x_n} \to \infty$ für $x_n \to 0$ und da $\sqrt{x} > m$ für $m \in \mathbb{N}$ und alle $x > m^2$. Damit folgt die Uneigentliche Konvergenz $\lim_{x\downarrow 0} g(x) = +\infty$. Somit kann $\lim_{x\to 0} g(x)$ weder eigentlich noch uneigentlich existieren.

6. Für $x \neq 1, -1$ gilt $\frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)}$. Also folgt

$$\lim_{x\uparrow 1} \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \left(\lim_{x\uparrow 1} \frac{1}{x-1}\right)\left(\lim_{x\uparrow 1} \frac{x}{x+1}\right) = \left(\lim_{x\uparrow 1} \frac{1}{x-1}\right)\frac{1}{2} = -\infty$$

und

$$\lim_{x\downarrow 1} \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \left(\lim_{x\downarrow 1} \frac{1}{x-1}\right)\left(\lim_{x\downarrow 1} \frac{x}{x+1}\right) = \left(\lim_{x\downarrow 1} \frac{1}{x-1}\right)\frac{1}{2} = \infty.$$

Damit kann $\lim_{x\to 1} \frac{x}{x^2-1}$ weder eigentlich noch uneigentlich existieren.

7. Es gilt $\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da $\lim_{x\to\infty} e^{-2x} = 0$ und $\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ folgt $\lim_{x\pm\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \pm 1$.

8. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \to \infty$. O.B.d.A sei $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$x_n^3 + x_n^2 + 1 \geq x_n^3 \to \infty$$

für $n \to \infty$, also folgt $\lim_{x\to\infty} x_n^3 + x_n^2 + 1 = \infty$.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \to -\infty$. O.B.d.A sei $x_n < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\frac{x_n^3}{x_n^2+1} = x_n \frac{x_n^2}{x_n^2-1} \to -\infty$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{x_n^3}{x_n^2+1} < -2$ für alle $n > n_0$. Damit gilt für alle $n > n_0$ aber auch

$$x_n^3 + x_n^2 + 1 < (-2)(x_n^2+1) + x_n^2 + 1 = (-1)(x_n^2+1).$$

Aber $x_n^2 + 1 \to +\infty$ für $x_n \to \pm\infty$. Somit folgt $x_n^3 + x_n^2 + 1 \to -\infty$ für $n \to \infty$ und damit $\lim_{x\to-\infty} x_n^3 + x_n^2 + 1 = -\infty$.

9. Es gilt $\cos(\pi k) = 1$ falls k gerade ist und $\cos(\pi k) = -1$ falls k ungerade ist. Da $x_k = \pi k \to \infty$ und $y_k = -\pi k \to -\infty$ für $k \to \infty$, existiert weder $\lim_{x\to\infty} \cos(x)$ noch $\lim_{x\to-\infty} \cos(x)$

10. Die selben Folgen x_k, y_k wie in 9. liefern

$$x_k \cos(x_k) = \begin{cases} \pi k & k \in 2\mathbb{N} \\ -\pi k & k \in 2\mathbb{N}_0 + 1 \end{cases}$$

und

$$y_k \cos(y_k) = \begin{cases} -\pi k & k \in 2\mathbb{N} \\ \pi k & k \in 2\mathbb{N}_0 + 1 \end{cases}.$$

Also existiert weder $\lim_{x\to\infty} x\cos(x)$ noch $\lim_{x\to-\infty} x\cos(x)$ (weder as Zahl in $\mathbb{C}$ noch uneigentlich).
