Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

Analysis für Informatiker

1. Präsenzübungsblatt

Präsenzaufgabe 1.1 Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$. Dann ist der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gegeben durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

und entspricht der Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge. Für $k > n$ definieren wir $\binom{n}{k} = 0$.

Zeigen Sie

(i) mit einer direkten Rechnung

(ii) mit einem kombinatorischen Beweis,

dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ die sogenannte **Pascalsche Formel**

$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

gilt.

Präsenzaufgabe 1.2 Zeigen Sie, dass auf einer Menge mit zwei bzw. drei Elementen eine Körperstruktur existiert.

Präsenzaufgabe 1.3 Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $x, y \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

1. $-(-x) = x$
2. $-(x+y) = -x-y$
3. $xy = 0 \iff x = 0 \vee y = 0$
4. $(-x)y = -xy = x(-y)$
5. $(-x)(-y) = xy$.

Präsenzaufgabe 1.4 In Präsenzaufgabe 0.6 wurde der Betrag $|x|$ einer beliebigen rationalen Zahl $x \in \mathbb{Q}$ definiert. Zeigen Sie, dass für $x, y \in \mathbb{Q}$ folgende Ungleichungen gelten:

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

und

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|.$$

(Hinweis: die erste Ungleichung wird Dreiecksungleichung genannt.)

Gilt auch $\big||x| - |y|\big| \leq |x+y|$?
