

Analysis für Informatiker

10. Präsenzübungsblatt

Präsenzaufgabe 10.1 Zeigen Sie mit Hilfe der Ableitungsregeln, dass die folgenden Funktionen differenzierbar sind und berechnen Sie deren Ableitung.

1. $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
2. $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (3x^3 + 2x^2 + x + 1) \cosh(e^x)e^{(x^2)}$
4. $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(\frac{1}{x^2})}{x^4 + x^2 + 1}$.

Präsenzaufgabe 10.2 Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

differenzierbar ist. Zeigen Sie anschließend, dass die Ableitung f' nicht stetig ist.

Präsenzaufgabe 10.3 Zeigen Sie, dass die Wurzelfunktion

$$\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$$

differenzierbar ist, mit Ableitung

$$(\sqrt{\cdot})' : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ist f' erneut differenzierbar? Berechnen Sie anschließend noch die Ableitung der Funktion $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sqrt{\cosh(1/x)}}{(x^2+1)}$.

Präsenzaufgabe 10.4 Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

unendlich oft differenzierbar in \mathbb{R} ist mit $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

(Hierbei bezeichnet $f^{(n)}$ ($n \in \mathbb{N}_0$) die n -te Ableitung von f , also $f^{(0)} := f$ und $f^{(n+1)} := (f^{(n)})'$ für $n \in \mathbb{N}_0$).
