Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

Analysis für Informatiker

11. Präsenzübungsblatt

Präsenzaufgabe 11.1 Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen differenzierbar sind und berechnen Sie deren Ableitung.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \log(\sqrt{x^4 + 2x^2 + 4})$
2. $g : \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sinh(\log(3x^2))}{\sin(x)}$.

Präsenzaufgabe 11.2 Der Konvergenzradius r der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

ist bekanntlich gleich 1. Sei $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} x^k$. Begründen Sie, dass f unendlich oft differenzierbar ist und zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{j} (k+i)x^k = f^{(j)}(x) = \frac{j!}{(1-x)^{j+1}}$$

für alle $x \in (-1, 1)$ gilt.

Präsenzaufgabe 11.3 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = e^x + x^{117} + x^7 + x^{23} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(a) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist und dass die Umkehrfunktion differenzierbar ist.

Hinweis: Untersuchen Sie f auf Monotonie und bestimmen Sie das Grenzverhalten $x \to \pm\infty$.

(b) Berechnen Sie $(f^{-1})'(1)$.

Präsenzaufgabe 11.4 Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie: Besitzt f $n \in \mathbb{N}$ Nullstellen mit $n \geq 2$, so besitzt f' mindestens $n - 1$ Nullstellen.

(Hinweis: Mittelwertsatz)

Präsenzaufgabe 11.5 Untersuchen Sie die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 e^{-x},$$

$$g : [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x}^3 + 1}$$

und

$$h : (0, \sqrt[3]{4}) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x}^3 + 1}$$

auf lokale und globale Minima und Maxima.