

Analysis für Informatiker

12. Präsenzübungsblatt

Präsenzaufgabe 12.1 Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \sin(\log(x)) & x > 0 \\ x^2 - 2 & x < 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

auf lokale und globale Maxima und Minima.

Präsenzaufgabe 12.2 Bestimmen Sie alle Taylorpolynome T_n und die zugehörigen Restglieder R_n ($n \in \mathbb{N}_0$) im Entwicklungspunkt $x = 0$ der Funktionen \cos , \sinh und \arctan und zeigen Sie, dass $T_n \cos(x, 0) \rightarrow \cos(x)$, $T_n \sinh(x, 0) \rightarrow \sinh(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \rightarrow \infty$ und $T_n \arctan(x, 0) \rightarrow \arctan(x)$ für alle $x \in (-1, 1)$ und $n \rightarrow \infty$. Zeigen Sie anschließend die Identität

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{3^j(2j+1)}.$$

Präsenzaufgabe 12.3 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos(x) \sinh(x^2)}{\sqrt{3x^2 + \cosh(x)} - 1}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(x) - \sin(2x)}{x - \sin(x)}$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^{\frac{3}{2}} + 1)^{\frac{1}{\log(x)}}$.

Präsenzaufgabe 12.4 Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit

1. $U = \mathbb{R}$, $f(x) = 5x^{117} + 4x^7 + 3x^{23} + 1$
2. $U = \mathbb{R}_{>0}$, $f(x) = e^{5x^{10}} x^9 + \frac{7}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x^5}$
3. $U = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \frac{1}{(1-x)^{100}}$
4. $U = \mathbb{R}_{>0}$, $f(x) = \frac{1 - \log(x)}{x^2}$
5. $U = \mathbb{R}$, $f(x) = 2x \cosh(x^2 + 1)$

Bestimmen Sie für jede der oben angegebenen Funktionen jeweils eine differenzierbare Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
