Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

# Analysis für Informatiker

## 2. Präsenzübungsblatt

**Präsenzaufgabe 2.1**

1. Finden Sie Zahlen $N \in \mathbb{N}_0$, $c_0, \dots, c_N \in \{0, \dots, b-1\}$, sodass
$$1000 = c_0 + c_1 b + \cdots + c_N b^N$$
für (i) $b = 2$ (ii) $b = 3$ (iii) $b = 10$.

2. Sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b > 1$ und $\{c_i : i \in \mathbb{N}_0\}$ natürliche Zahlen mit $0 \leq c_i \leq b-1$. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$
$$\sum_{i=0}^{n} c_i b^i \leq b^{n+1} - 1$$
gilt.

3. Sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b > 1$. Zeigen Sie, dass jede Zahl $x \in \mathbb{N}_0$ eine eindeutige Darstellung der Form
$$x = \sum_{i=0}^{N} c_i b^i = c_0 + c_1 b + \cdots + c_N b^N$$
mit einem $N \in \mathbb{N}_0$ und $c_i \in \{0, \dots, b-1\}$ für alle $i \in \{0, \dots, N\}$ besitzt.

**Präsenzaufgabe 2.2** Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper und $x, y \in \mathbb{K}$ mit $x + 1 > 0$ und $y + 1 > 0$. Zeigen Sie die Äquivalenz
$$x < y \iff \frac{1-x}{1+x} > \frac{1-y}{1+y}.$$

**Präsenzaufgabe 2.3**

1. Sei $x \in \mathbb{R}$ und
$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$
der Betrag von $x$. Zeigen Sie, dass $|x| = \sqrt{x^2}$ gilt.

2. Zeigen Sie, dass
$$\sqrt[7]{\frac{50^6}{5^{14}} \frac{5}{3^7} (\sqrt[7]{10}\, 9)^7} = 6$$
gilt.

**Präsenzaufgabe 2.4** Bestimmen Sie falls existent Supremum, Infimum, Maximum und Minimum (in $\mathbb{R}$) folgender Teilmengen von $\mathbb{R}$:

1. $M_1 = \left\{(-1)^n \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$
2. $M_2 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$
3. $M_3 = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$
4. $M_4 = \left\{\frac{n}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$
5. $M_5 = \left\{\frac{m^2}{n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$

(Hinweis: Es darf benutzt werden, dass zwischen zwei unterschiedlichen reellen Zahlen immer eine rationale Zahl liegt.)

---