Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

Analysis für Informatiker

3. Präsenzübungsblatt

Präsenzaufgabe 3.1 Berechnen Sie die Normalform $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ der folgenden komplexen Zahlen:

1. $(2 + 3i) + (1 - \frac{1}{2}i) - (\sqrt{2} - \sqrt{3}i)$
2. $\left(-3 + \frac{5}{4}i\right)\left(\frac{1}{2} - 7i\right)$
3. $\frac{1}{2+3i}$
4. $\frac{-3+\sqrt{2}i}{2+3i}$.

Präsenzaufgabe 3.2 Skizzieren Sie die folgen Teilmengen der komplexen Zahlen

1. $\mathbb{R}(1 + 2i) = \{z \in \mathbb{C} : z = \alpha(1 + 2i) \text{ für ein } \alpha \in \mathbb{R}\}$
2. $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z)^2 = \mathrm{Re}(z)\}$
3. $\left\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1, -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq \frac{1}{2}\right\}$
4. $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \left\{z \in \mathbb{C} : j \leq |z| \leq j + \frac{1}{j+1}\right\}$

Präsenzaufgabe 3.3

1. Finden Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^8 = 1$.
2. Bestimmen Sie die komplexen Lösungen der Gleichung $z^2 = c$ für $c \in \mathbb{R}$ mit $c < 0$.
3. Sei $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $b^2 - 4ac < 0$. Bestimmen Sie die komplexen Lösungen der Gleichung $az^2 + bz + c = 0$.

Präsenzaufgabe 3.4 Untersuchen die folgende Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

1. $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$
2. $f_2 : \mathbb{R} \mapsto \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}, x \mapsto x^2$
3. $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$
4. $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$, wobei $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ für $x \in \mathbb{R}$.
5. $f_4 : [0, 1) \to \mathbb{R}, x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$, wobei $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Präsenzaufgabe 3.5 Sei $\emptyset \neq X$ eine Menge.

1. Geben Sie eine Injektion $f : X \to P(X)$ an.
2. Zeigen Sie, dass **keine** Surjektion

$$f : X \to P(X)$$

   von X in die Potenzmenge von X existiert.

   (Hinweis: Zeigen Sie, dass für eine Abbildung $f : X \to P(X)$ die Menge $X' = \{x \in X : x \notin f(x)\}$ nicht im Bild von f liegt).
