

# Analysis für Informatiker

## 4. Präsenzübungsblatt

**Präsenzaufgabe 4.1** Seien  $X, Y, Z$  Mengen und  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$  Abbildungen. Beweisen oder widerlegen Sie:

1.  $g \circ f$  injektiv  $\Rightarrow g$  injektiv
2.  $g \circ f$  injektiv  $\Rightarrow f$  injektiv
3.  $g \circ f$  surjektiv  $\Rightarrow f$  surjektiv
4.  $g \circ f$  surjektiv  $\Rightarrow g$  surjektiv

**Präsenzaufgabe 4.2**

1. Sei

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x + 1 & \text{falls } x < 1 \\ x(x + 1) & \text{falls } x \geq 1 \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass  $f$  bijektiv ist und geben Sie die Umkehrfunktion an.

2. Sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto |x|$  die Betragsfunktion. Zeigen Sie, dass  $g \circ f$  nicht injektiv aber surjektiv ist.
3. Geben Sie eine Teilmenge  $A$  von  $\mathbb{R}$  an, sodass  $g \circ f$  eingeschränkt auf  $A$  eine Bijektion  $g \circ f|_A : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto (g \circ f)(x)$  induziert.

**Präsenzaufgabe 4.3** Konstruieren Sie eine Bijektion

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$

und geben Sie die Umkehrfunktion an.

**Präsenzaufgabe 4.4** Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

1.  $\left((-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\right)_{n \in \mathbb{N}}$
  2.  $\left(\frac{-n^2 + 3n - 2}{n^3 + 1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$
  3.  $\left(\frac{2^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$
  4.  $\left(\frac{\binom{n}{3}}{\binom{n}{2} + 1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ .
-