Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

Analysis für Informatiker

5. Präsenzübungsblatt

Präsenzaufgabe 5.1 *(Newtonverfahren)* Seien $n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}_{>0}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n - c$. Wir schreiben f' für die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto nx^{n-1}$. Sei $x_0 = 1$ und definiere für $k \in \mathbb{N}$ rekursiv

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}.$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktionen f und

$$t_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

(b) Zeigen Sie, dass x_1 die einzige Nullstelle von t_0 ist.

(c) Geben Sie eine Beschreibung von x_k. Malen Sie Bilder!

(d) Zeigen Sie, dass $x_k^n \geq c$ für alle $k \in \mathbb{N}$. (*Hinweis:* Die Bernoulli Ungleichung könnte hilfreich sein.)

(e) Zeigen Sie, dass $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist.

(f) Zeigen Sie, dass $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und $\lim_{k\to\infty} x_k = \sqrt[n]{c}$.

Präsenzaufgabe 5.2 Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

1. $\left(\frac{\sqrt[n]{n}+\frac{2^n}{n!}}{\sqrt[3]{n}} + 8\sqrt[n]{n} - 3\right)_{n\in\mathbb{N}}$
2. $\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
3. $\left(\frac{n^5-n+7}{5n^5+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
4. $\left((-1)^n\frac{n^5-n+7}{5n^5+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Präsenzaufgabe 5.3 Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit

$$a_n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right),$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Hinweis: Die Identität $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ $(a, b \in \mathbb{R})$ könnte von Vorteil sein.

Präsenzaufgabe 5.4 Sind die folgende Aussagen richtig oder falsch? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) Die Summe zweier beschränkter Folgen in $\mathbb{R}$ ist konvergent.

(b) Ist die Summe zweier Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergent, dann konvergieren auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selbst.

(c) Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, dann ist die Folge $((-1)^n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

(d) Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gegen a, so ist $(a_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.
