Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

Analysis für Informatiker

6. Präsenzübungsblatt

Präsenzaufgabe 6.1 Man überprüfe die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{n}}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (2^{-n} + 3^{-n})$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2 2^k}{(2k)!}$,

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2k)^k}$,

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - 1)$.

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{1+3n}}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{n^2+n+1}}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^6+n+1}{3n^6+n^2+1}$

Präsenzaufgabe 6.2 Das Ziel der Hausaufgabe 6.2 ist zu zeigen, dass die Folge $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

In dieser Präsenzübung ist das Ziel zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ ebenfalls konvergiert und dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

gilt.

(Hinweis: Sei $c := \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Im Beweis der Hausaufgabe 6.2 wird gezeigt, dass $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend ist. Zeigen Sie zuerst, dass für fixes $m \in \mathbb{N}$ und alle $\epsilon > 0$ die Ungleichung $(1-\epsilon)\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \leq c$ gilt. Machen Sie sich anschließend klar, dass diese Aussage äquivalent zu $\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \leq c$ ist und folgern Sie, dass $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konvergiert und $\leq c$ ist. Zeigen Sie anschließend die Ungleichung $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \geq c$.)

Präsenzaufgabe 6.3 Es sei $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_n := f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Die rekursiv definierte Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Fibonacci Folge. Für $n \in \mathbb{N}$, sei

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k}{2^k}.$$

Man zeige:

(a) Es gilt $s_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 2$,

(c) $\sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\} = 2$.
