Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

Analysis für Informatiker

7. Präsenzübungsblatt

Präsenzaufgabe 7.1 Berechnen Sie die Konvergenzradien folgender Potenzreihen:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{k^{k+1}} z^k,$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 3^k z^{3k},$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^{10}+k} z^k.$

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k^2}}{k+5} z^k$

(e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k^2+(-1)^k}{k^2+2}\right)^k z^k$

Präsenzaufgabe 7.2

1. Zeigen Sie, dass für $s \in \mathbb{C}$ der Konvergenzradius der Binomialreihe

$$B_s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} z^k,$$

wobei $\binom{s}{k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{s-(j-1)}{j} = \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-k+1)}{k!}$, gleich 1 ist, falls $s \notin \mathbb{N}_0$ und unendlich ist für $s \in \mathbb{N}_0$.

2. Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und alle $s, t \in \mathbb{C}$ die Identität

$$B_{s+t}(z) = B_s(z)B_t(z)$$

gilt.

Hinweis: Laut Vorlesung hat eine nicht triviale komplexwertige Polynomfunktion höchstens endlich viele Nullstellen in $\mathbb{C}$ $(*)$, demnach ist eine komplexwertige Polynomfunktion eindeutig durch ihre Koeffizienten bestimmt $(**)$.

Beweisen Sie zuerst, dass

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k}\binom{t}{n-k} = \binom{s+t}{n}$$

für alle $s, t \in \mathbb{N}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes und $(**)$. Folgern Sie hieraus und aus $(*)$, dass bereits

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \binom{t}{n-k} = \binom{s+t}{n}$$

für alle $s, t \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gelten muss. Verwenden Sie anschließend das Cauchy-Produkt, um die Identität $B_{s+t}(z) = B_s(z)B_t(z)$ für alle $s, t \in \mathbb{C}$ und alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ herzuleiten.

3. Zeigen Sie, dass $B_s(z) \neq 0$ für alle $s \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$.
4. Zeigen Sie, dass $B_s(x) > 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

Präsenzaufgabe 7.3

1. Berechnen Sie die Eulerdarstellungen der komplexen Zahlen $1+i$ und $-2+2i$.
2. Berechnen Sie die Eulerdarstellung des Produkts von $1+i$ und $-2+2i$.
3. Finden Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^6 = 1$.
4. Zeichnen Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} : z^5 = 32\}$

Präsenzaufgabe 7.4 Zeigen Sie die Identität

$$\cos(\phi)^4 = \frac{1}{8}\cos(4\phi) + \frac{1}{2}\cos(2\phi) + \frac{3}{8}$$

für alle $\phi \in \mathbb{R}$.
