Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 23/24

Analysis für Informatiker

8. Präsenzübungsblatt

Präsenzaufgabe 8.1 Welche der angegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzen eine konvergente Teilfolge und welche nicht? Begründen Sie ihre Antwort.

(a) $a_n = \frac{i(n+n^2)}{n^2-i}$

(b) $a_n = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$

(c) $a_n = \sqrt{n}$

(d) $a_n = \left(e^{2\pi i\sqrt{2}}\right)^n$.

Präsenzaufgabe 8.2 Für $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, versteht man unter einem b-adischen Bruch eine Reihe der Gestalt

$$\pm \sum_{n=-\infty}^{k} a_n b^n.$$

Hierbei ist $k \geq 0$ und die a_n sind ganze Zahlen mit $0 \leq a_n < b$. Schreibweise: $a_k a_{k-1} \ldots a_0.a_{-1}a_{-2} \ldots$.

(a) Man zeige: Jeder b-adische Bruch stellt eine Cauchy-Folge dar, konvergiert also gegen eine reelle Zahl.

(b) Man zeige: Jede reelle Zahl läßt sich in einen b-adischen Bruch entwickeln, das heißt zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es für jede $n \in \mathbb{Z}_{\leq k}$ ein $a_n \in \{0, \ldots, b-1\}$ mit $x = \sum_{n=-\infty}^{k} a_n b^n$.

(c) Man entwickle $x = \frac{1}{7}$ in einen b-adischen Bruch für $b = 2$.

Präsenzaufgabe 8.3
Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen stetig in $x = 0$ sind:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

2. $f : (-1,\infty) \to \mathbb{C}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}\left(\frac{1}{x+1} - 1\right)^2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Präsenzaufgabe 8.4 Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\chi_{[0,1]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \chi_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

nicht stetig ist. In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist $\chi_{[0,1]}$ stetig/folgenstetig und in welchen nicht?