

Analysis für Informatiker

9. Präsenzübungsblatt

Präsenzaufgabe 9.1

1. Zeigen Sie, dass für alle $x \in [0, 2]$

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

gilt.

2. Schließen Sie aus 1., dass $\sin(x) > 0$ für alle $x \in (0, 2)$ gilt.
3. Zeigen Sie die Identität

$$\cos(z) - \cos(w) = -\sin\left(\frac{z+w}{2}\right) \sin\left(\frac{z-w}{2}\right)$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

4. Zeigen Sie, dass \cos im Intervall $(0, 2)$ strikt monoton fallend ist.
5. Zeigen Sie, dass für alle $x \in [0, 2]$

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

gilt.

6. Zeigen Sie, dass \cos im Intervall $[0, 2]$ genau eine Nullstelle besitzt. Wir bezeichnen diese Nullstelle mit $\frac{\pi}{2}$.
7. Zeigen Sie, dass für jedes $u \in [0, 1)$ genau ein $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ existiert, sodass $u = \cos(x)$ gilt.
8. Zeigen Sie, dass für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ und $\operatorname{Re}(z) > 0$ und $\operatorname{Im}(z) \geq 0$ genau ein $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ existiert mit $e^{ix} = z$.
9. Folgern Sie die Identität

$$\{e^{ix} : x \in [0, 2\pi)\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

(wobei $2\pi = 4\frac{\pi}{2}$). Zeigen Sie zusätzlich, dass für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ **genau** ein $x \in [0, 2\pi)$ mit $e^{ix} = z$ existiert.

Präsenzaufgabe 9.2 Welche der folgenden (eigentlichen oder uneigentlichen) Grenzwerte existieren und welche nicht? Geben Sie den Grenzwert an, falls er existiert.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$ (Hinweis: Verwenden Sie zum Beispiel Präsenzaufgabe 9.1.5)

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}}$

3. $\lim_{x \uparrow 0} e^{i \frac{1}{x}}, \lim_{x \downarrow 0} e^{i \frac{1}{x}}, \lim_{x \rightarrow 0} e^{i \frac{1}{x}}$
4. $\lim_{x \uparrow 1} f(x), \lim_{x \downarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, wobei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x < 1$ und $f(x) = 1$ für $x \geq 1$.
5. $\lim_{x \uparrow 0} g(x), \lim_{x \downarrow 0} g(x), \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, wobei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{x}}{x} & x > 0 \end{cases}$
6. $\lim_{x \uparrow 1} \frac{x}{x^2-1}, \lim_{x \downarrow 1} \frac{x}{x^2-1}, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2-1}$
7. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$
8. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 + x^2 + x + 1$
9. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos(x)$
10. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \cos(x)$