Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 2023–2024

Probeklausur
Analysis für Informatiker

Name:

Matrikelnummer:

Wichtige Informationen:

- Als Hilfsmittel ist alles in Papierform erlaubt. Elektronische Hilfsmittel sind nicht erlaubt.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Die Probeklausur besteht aus sechs Aufgaben mit insgesamt 100 Punkte. Man hat bestanden, wenn man mindestens 50 Punkte hat.
- Bitte arbeiten Sie nur mit dokumentenechten Schreibgeräten. Schreiben Sie nicht mit roter Farbe.
- Schreiben Sie leserlich. Der Lösungsweg muss vollständig und nachvollziehbar dokumentiert sein. Begründen Sie alle Ihre Antworten!

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Summe**

Aufgabe 1: (14 Punkte)

(a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie den Betrag von $\dfrac{3+4i}{3+2i}$. (6 P.)

(b) Skizzieren Sie die Menge

$$D = \left\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 + i| \geq 1\right\} \cap \left\{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Im}(z)| \leq \frac{1}{2}\right\}$$

in $\mathbb{C}$. (8 P.)

Aufgabe 2: (18 Punkte)

Sei $x_0 \in (0,1)$. Wir definieren rekursiv $x_n := \frac{3x_{n-1}^3 + 4x_{n-1}}{7}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $0 < x_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (6 P.)

(b) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton ist. (6 P.)

(c) Beweisen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und bestimmen Sie ihren Grenzwert. (6 P.)

Aufgabe 3: (16 Punkte)

(a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-i)^k k^3 e^{(k^2)} z^k$ absolut konvergent? (8 P.)

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left(3^{-k} - \frac{2^k}{k!}\right)$ konvergent ist und bestimmen Sie ihren Wert. (8 P.)

Aufgabe 4: (20 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 e^{-x} + \sqrt{1 + x^2} e^x - 2x$.

(a) Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung von f. (10 P.)

(b) Beweisen Sie, dass f mindestens ein lokales Extremum in $(0, 1)$ besitzt. (10 P.)

Aufgabe 5: (15 Punkte)

An welchen Stellen ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{\log\left(\frac{1}{|x|}\right)} & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{Q}) \end{cases}$$

stetig?

Aufgabe 6: (15 Punkte)

Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Minima und Maxima der Funktion

$$f : [-2, 1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}} + x^4.$$