1. Übungsblatt - Lie-Gruppen

Besprechung am 12.04.2021

Aufgabe: Sei $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die n-Sphäre, $N = \{0, \cdots, 0, 1\} \in \mathbb{S}^n$ und $S = \{0, \cdots, 0, -1\} \in \mathbb{S}^n$. Zeigen Sie, dass die Menge der beiden Abbildungen

$$P_N : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n, x \mapsto \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \cdots, x_n)$$

und

$$P_S : \mathbb{S}^n \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^n, x \mapsto \frac{1}{1 + x_{n+1}}(x_1, \cdots, x_n)$$

$\mathbb{S}^n$ zu einer glatten Mannigfaltigkeit macht.

Aufgabe: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k < n$. Sei $G(k, n)$ die Menge aller k-dimensionalen $\mathbb{R}$-Unterräume von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass auf $G(k, n)$ eine glatte Struktur existiert, welche $G(k, n)$ zu einer $k(n-k)$ dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit macht.

Aufgabe: Sei $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^2$ der zweidimensionale Torus, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ irrational und

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2,\ t \mapsto (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t}).$$

Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine offene Umgebung U existiert, sodass $\gamma(U)$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{T}^2$ ist. Zeigen Sie weiter, dass $\gamma(\mathbb{R})$ keine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{T}^2$ ist. Hinweis: Zeigen Sie, dass $\gamma(\mathbb{R}) \subset \mathbb{T}^2$ dicht in der Teilraumtopologie von $\mathbb{T}^2$ ist.