

3. Übungsblatt - Lie-Gruppen

Besprechung am 26.04.2021

Aufgabe 1 und 3 aus dem Aufgabenkatalog von Erik van den Ban.

Aufgabe: Sei G eine Lie-Gruppe. Seien zudem $S, T \subset G$ sowohl Untergruppen als auch Untermannigfaltigkeiten von G mit $G = ST$, $S \cap T = \{e\}$ und $T_e S \oplus T_e T = T_e G$.

(i) Zeigen Sie, dass

$$S \times T \rightarrow G, (s, t) \mapsto st$$

ein Diffeomorphismus (von Mannigfaltigkeiten) ist.

Sei nun $G = \text{Gl}(n, \mathbb{R})$, $K = O(n)$, $A \subset G$ die Menge der diagonalen Matrizen mit positiven Einträgen in G und $N \subset G$ die Menge der oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen.

(ii) Zeigen Sie, dass K, A, N und AN sowohl Untergruppen als auch Untermannigfaltigkeiten von G sind.

(iii) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$K \times A \times N \rightarrow G, (k, a, n) \mapsto kan$$

ein Diffeomorphismus (von Mannigfaltigkeiten) ist.