4. Übungsblatt - Lie-Gruppen

Besprechung am 03.05.2021

Aufgabe 1: Sei G eine Lie-Gruppe. Seien zudem $S, T \subset G$ sowohl Untergruppen als auch Untermannigfaltigkeiten von G mit $G = ST$, $S \cap T = \{e\}$ und $T_eS \oplus T_eT = T_eG$.

(i) Zeigen Sie, dass
$$S \times T \to G,\ (s,t) \mapsto st$$
ein Diffeomorphismus (von Mannigfaltigkeiten) ist.

Sei nun $G = \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$, $K = O(n)$, $A \subset G$ die Menge der diagonalen Matrizen mit positiven Einträgen in G und $N \subset G$ die Menge der oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen.

(ii) Zeigen Sie, dass K, A, N und AN sowohl Untergruppen als auch Untermannigfaltigkeiten von G sind.

(iii) Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$K \times A \times N \to G,\ (k, a, n) \mapsto kan$$
ein Diffeomorphismus (von Mannigfaltigkeiten) ist.

Aufgabe 2: Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\mathcal{V}(M)$ der Vektorraum aller glatten Vektorfelder auf M. Für $V \in \mathcal{V}(M)$ und eine glatte Funktion $f : M \to R$ sei
$$Vf : M \to \mathbb{R},\ x \mapsto T_xf(V(x)).$$

(i) Zeigen Sie, dass Vf glatt ist für alle $V \in \mathcal{V}(M)$ und alle $f \in C^\infty(M)$.

(ii) Zeigen Sie, dass
$$C^\infty(M) \to C^\infty(M),\ f \mapsto Vf$$
linear ist.

Für eine weitere Mannigfaltigkeit N und einen Diffeomorphismus $\phi : M \to N$ definieren wir den Pullback eines Vektorfelds $W \in \mathcal{V}(N)$ als
$$\phi^*(W)(x) := (T_x\phi)^{-1}(W(\phi(x))) \qquad (x \in M).$$

(iii) Seien $U, V \in \mathcal{V}(M)$ und sei Φ_t der Fluss von U.

Zeigen Sie, dass für jedes $f \in C^\infty(M)$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\Phi_t^* V)(f) = U(V(f)) - V(U(f)).$$

gilt.

(iv) Zeigen Sie anschließend, dass es ein (eindeutiges) Vektorfeld $[U, V] \in \mathcal{V}(M)$ gibt mit $[U, V](f) = U(V(f)) - V(U(f))$ für alle $f \in C^\infty(M)$.

(v) Zeigen Sie, dass für alle $U, V, W \in \mathcal{V}(M)$ die sogenannte Jacobi-Identität

$$[U, [V, W]] + [V, [W, U]] + [W, [U, V]] = 0$$

gilt.