Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit

Sommersemester 2024

Lineare Algebra für Informatiker

1. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 1.1 Sei $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass die übliche Multiplikation von reellen Zahlen $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \setminus \{0\}$ zu einer Gruppe macht.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ mit der üblichen Addition und Multiplikation von reellen Zahlen ein Ring ist.

Präsenzaufgabe 1.2 Sei p eine Primzahl. Sei R die Teilmenge aller rationalen Zahlen $\frac{m}{n}$, so dass $n \neq 0$ und n nicht durch p teilbar ist. Zeigen Sie, dass R ein Ring ist.

Präsenzaufgabe 1.3 Sie $(G, \star)$ eine Gruppe. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Wenn $x, y, z \in G$ und $x \star y = x \star z$, dann gilt $y = z$.

(b) Wenn $x, y \in G$, dann $(x \star y)^{-1} = y^{-1} \star x^{-1}$.

(c) Wenn $x, y \in G$, dann gibt es eindeutige Elemente $w, z \in G$, sodass $w \star x = y$ und $x \star z = y$.

Präsenzaufgabe 1.4

(a) Bestimmen Sie $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Schreiben Sie $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ als eine Komposition von Transpositionen.

Präsenzaufgabe 1.5 Wir betrachten $\{\pm 1\}$ zusammen versehen mit der üblichen Multiplikation von Zahlen als eine Gruppe. Sei $n \in \mathbb{N}$. Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass es einen Gruppenhomomorphismus $\operatorname{sign} : S_n \to \{\pm 1\}$ mit der Eigenschaft gibt, dass $\operatorname{sign}(\sigma) = -1$ für jede Transposition $\sigma \in S_n$.

(a) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Für $\sigma \in S_n$ sei $\sigma(f) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Abbildung gegeben durch

$$\sigma(f)(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \qquad \big((x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\big).$$

Zeigen Sie, dass

$$\sigma\big(\tau(f)\big) = (\sigma \circ \tau)(f) \qquad (\sigma, \tau \in S_n).$$

(b) Betrachten Sie jetzt die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j).$$

Zeigen Sie, dass $\sigma(f) = \pm f$ für jedes $\sigma \in S_n$.

(c) Definieren Sie $\mathrm{sign} : S_n \to \{\pm 1\}$ durch

$$\sigma(f) = \mathrm{sign}(\sigma) f \qquad (\sigma \in S_n).$$

Zeigen Sie, dass sign ein Gruppenhomomorphismus ist.

(d) Zeigen Sie, dass $\mathrm{sign}(\sigma) = -1$ für jede Transposition $\sigma \in S_n$.

(e) Sei $n = 4$. Bestimmen Sie $\mathrm{sign}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}\right)$.

Präsenzaufgabe 1.6

Zeigen Sie, dass $n^3 - 4n$ teilbar ist durch 3 für alle $n \in \mathbb{Z}$.