Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit

Sommersemester 2024

Lineare Algebra für Informatiker

2. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 2.1 Sei $(G, \star)$ eine Gruppe. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Wenn $x^2 = e$ für alle $x \in G$ dann ist G abelsch.

(b) G ist genau dann abelsch, wenn die Abbildung $\iota : G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Präsenzaufgabe 2.2 Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Sei

$$R^\times := \{x \in R : \text{ es gibt ein } y \in R, \text{ sodass } x \cdot y = y \cdot x = 1\}.$$

(Die Elemente in $R^\times$ heißen Einheiten.)

(a) Beweisen Sie, dass $(R^\times, \cdot)$ eine Gruppe ist.

(b) Bestimmen Sie $R^\times$, falls $R = \mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$.

Präsenzaufgabe 2.3 Der fermatsche Primzahltest ist ein Primzahltest, der auf dem kleinen fermatschen Satz beruht. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Wähle ein $a \in \mathbb{Z}$. Wenn $[a]^{n-1} \neq [1]$, dann ist n keine Primzahl. Sonnst könnte n eine Primzahl sein.
Betrachten Sie $n = 57$ und berechnen Sie $[2]^{56}$. Zeigen Sie damit, dass 57 keine Primzahl ist.

Präsenzaufgabe 2.4 Bestimmen Sie $q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$, sodass

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) \quad \text{und} \quad \deg(r(x)) < \deg(g(x)),$$

wobei $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ gegeben werden durch

(a) $f(x) = x^6 - x^4 + 2x^2 + 1$ und $g(x) = x^2 + 1$,

(b) $f(x) = 7x^8 - x^2$ und $g(x) = x^3 - 1$.