Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit

Sommersemester 2024

Lineare Algebra für Informatiker

3. Übungsblatt - Lösungen

Präsenzaufgabe 3.1 Bestimmen Sie alle Nullstellen mit Multiplizitäten von

$$p(x) = 2x^5 - 6x^4 - 18x^3 + 46x^2 + 48x - 72 \in \mathbb{C}[x]$$

Hinweis: 1 *und* 3 *sind Nullstellen von* $p(x)$.

Lösung: Weil

$$p(1) = 2 - 6 - 18 + 46 + 48 - 72 = 0$$

ist 1 eine Nullstelle von $p(x)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}p(x) &= x^5 - 3x^4 - 9x^3 + 23x^2 + 24x - 36 \\
&= x^4(x-1) - 2x^4 - 9x^3 + 23x^2 + 24x - 36 \\
&= x^4(x-1) - 2x^3(x-1) - 11x^3 + 23x^2 + 24x - 36 \\
&= x^4(x-1) - 2x^3(x-1) - 11x^2(x-1) + 12x^2 + 24x - 36 \\
&= x^4(x-1) - 2x^3(x-1) - 11x^2(x-1) + 12x(x-1) + 36x - 36 \\
&= x^4(x-1) - 2x^3(x-1) - 11x^2(x-1) + 12x(x-1) + 36(x-1) \\
&= (x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36)(x-1).
\end{aligned}$$

Sei $p_1(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36$. Es gilt $p_1(1) = 1 - 2 - 11 + 12 + 36 = 38 \neq 0$. Damit ist 1 keine Nullstelle von $p_1(x)$. Weiter gilt

$$p_1(3) = 3^4 - 2 \cdot 3^3 - 11 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 + 36 = 81 - 54 - 99 + 36 + 36 = 0.$$

Darum ist 3 eine Nullstelle von $p_1(x)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36 \\
&= x^3(x-3) + x^3 - 11x^2 + 12x + 36 \\
&= x^3(x-3) + x^2(x-3) - 8x^2 + 12x + 36 \\
&= x^3(x-3) + x^2(x-3) - 8x(x-3) - 12x + 36 \\
&= x^3(x-3) + x^2(x-3) - 8x(x-3) - 12(x-3) \\
&= (x^3 + x^2 - 8x - 12)(x-3).
\end{aligned}$$

Sei $p_2(x) = x^3 + x^2 - 8x - 12$. Weil

$$p_2(3) = 3^3 + 3^2 - 8 \cdot 3 - 12 = 27 + 9 - 24 - 12 = 0$$

ist 3 eine Nullstelle von $p_2(x)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= x^3 + x^2 - 8x - 12 \\
&= x^2(x-3) + 4x^2 - 8x - 12 \\
&= x^2(x-3) + 4x(x-3) + 4x - 12 \\
&= x^2(x-3) + 4x(x-3) + 4(x-3) \\
&= (x^2 + 4x + 4)(x-3).
\end{aligned}$$

Sei $p_3(x) = x^2 + 4x + 4$. Dann $p_3(x) = (x + 2)^2$. Zusammenfassend gilt

$$p(x) = 2(x - 1)(x - 3)^2(x + 2)^2.$$

Die Nullstellen von $p(x)$ sind darum 1 mit Multiplizität 1, 3 mit Multiplizität 2 und -2 mit Multiplizität 2.