Universität Paderborn Sommersemester 2024
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit

Lineare Algebra für Informatiker

5. Übung - Lösungen

Präsenzaufgabe 5.1 Sei $V = \mathbb{C}^3$ und sei $U = \operatorname{span}(\{(1, i, 0), (2i, 1, 0)\}) \subseteq V$. Bestimmen Sie Unterräume W, sodass

(a) $V = U \oplus W$.
Lösung: Sei $W = \operatorname{span}(\{(0, 0, 1)\})$. Wenn $x, y, z \in \mathbb{C}$, dann gilt

$$\frac{x - 2iy}{3}(1, i, 0) + \frac{-ix + y}{3}(2i, 1, 0) + z(0, 0, 1) = (x, y, z).$$

Es folgt, dass $V = U + W$. Wenn $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ und $\lambda(1, i, 0) + \mu(2i, 1, 0) = \nu(0, 0, 1)$, dann folgt

$$\lambda + 2i\mu = 1, \quad \lambda i + \mu = 0 \quad \text{und} \quad \nu = 0$$

und damit $\lambda = \mu = \nu$. Es folgt, dass $U \cap W = \{O\}$. Darum gilt $V = U \oplus W$.

(b) $V = U + W$, aber V nicht die direkte Summe von U und W ist.
Lösung: Sei $W = V$. Dann gilt $U + W = U + V = V$ und $U \cap V = U \neq \{O\}$. Darum ist V nicht die direkte Summe von U und W.

(c) $U + W \neq V$.
Lösung: Sei $W = \{O\}$. Dann gilt $U + W = U \neq V$.

Präsenzaufgabe 5.2 Sei $V = \mathbb{C}[x]$ betrachtet als Vektorraum über $K = \mathbb{C}$. Seien V_+ und V_- gegeben durch

$$V_\pm := \{p(x) \in \mathbb{C}[x] : p(-x) = \pm p(x)\}.$$

Zeigen Sie, dass $V = V_+ \oplus V_-$. Geben Sie eine Basis von V_+ und eine Basis von V_- an.
Lösung: Seien $B_+ := \{x^{2k} : k \in \mathbb{N}_0\} \subseteq V_+$ und $B_- = \{x^{2k+1} : k \in \mathbb{N}_0\} \subseteq V_-$. Sei $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \in \mathbb{C}[x]$. Wenn $p(x) \in V_+$, dann

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2}p(x) + \frac{1}{2}p(x) = \frac{1}{2}p(-x) + \frac{1}{2}p(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k c_k x^k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} c_k x^k \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\big((-1)^k + 1\big)c_k x^k = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ gerade}}} c_k x^k \in \operatorname{span}(B_+). \end{aligned}$$

Wenn $p(x) \in V_-$, dann

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2}p(x) + \frac{1}{2}p(x) = -\frac{1}{2}p(-x) + \frac{1}{2}p(x) = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k c_k x^k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} c_k x^k \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\big(-(-1)^k + 1\big)c_k x^k = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ ungerade}}} c_k x^k \in \operatorname{span}(B_-). \end{aligned}$$

Es folgt, dass $V_\pm = \operatorname{span}(B_\pm)$. Wenn $n \in \mathbb{N}$ und $c_0 = c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$, sodass $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ das Nullpolynom ist, dann gilt $\deg\big(p(x)\big) = \deg\big(0\big) = -\infty$. Darum gilt $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$. Es folgt, dass $B_+ \cup B_-$ eine Menge von linear unabhängige Elemente ist. Darum ist auch $B_\pm$ eine Menge von linear unabhängige Elemente und deshalbe eine Basis von $V_\pm$.

Präsenzaufgabe 5.3 Sei $V := \{p(x) \in \mathbb{C}[x] : \deg(p(x)) \leq 2\}$ und seien $p_1(x) = x^2 + x + 1$, $p_2(x) = x^2 + 2x + 1$, $p_3(x) = 3x + 1$.

(a) Zeigen Sei, dass $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ eine Basis von V ist.
Lösung: Seien $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$. Wenn $c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) + c_3 p_3(x)$ das Nullpolynom ist, dann gilt

$$\begin{aligned}
(c_1 + c_2)x^2 &+ (c_1 + 2c_2 + 3c_3)x + (c_1 + c_2 + c_3) \\
&= c_1(x^2 + x + 1) + c_2(x^2 + 2x + 1) + c_3(3x + 1) \\
&= c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) + c_3 p_3(x) = 0.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$c_1 + c_2 = 0, \quad c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0 \quad \text{and} \quad c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

und darum

$$\begin{aligned}
c_3 &= (c_1 + c_2 + c_3) - (c_1 + c_2) = 0, \\
c_2 &= (c_1 + 2c_2 + 3c_3) - (c_1 + c_2) - 3c_3 = 0, \\
c_1 &= (c_1 + c_2) - c_2 = 0.
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $p_1(x), p_2(x)$ und $p_3(x)$ linear unabhängig sind.

Wenn $d_0, d_1, d_2 \in \mathbb{C}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
(-d_2 - d_1 + 3d_0)&p_1(x) + (2d_2 + d_1 - 3d_0)p_2(x) + (d_0 - d_2)p_3(x) \\
&= \Big((-d_2 - d_1 + 3d_0) + (2d_2 + d_1 - 3d_0)\Big)x^2 \\
&\quad + \Big((-d_2 - d_1 + 3d_0) + 2(2d_2 + d_1 - 3d_0) + 3(d_0 - d_2)\Big)x \\
&\quad + \Big((-d_2 - d_1 + 3d_0) + (2d_2 + d_1 - 3d_0) + (d_0 - d_2)\Big) \\
&= d_2 x^2 + d_1 x + d_0
\end{aligned}$$

Es folgt, dass $\operatorname{span}\big(\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}\big) = V$.

(b) Schreiben Sie $1, x, x^2$ als Linearkombinationen von $p_1(x)$, $p_2(x)$ und $p_3(x)$.
Lösung:

$$\begin{aligned}
3p_1(x) - 3p_2(x) + p_3(x) &= 1, \\
-p_1(x) + p_2(x) &= x, \\
-p_1(x) + 2p_2(x) - p_3(x) &= x^2.
\end{aligned}$$

(c) Schreiben Sie das Polynom $q(x) = 5x^2 - 10x - 97$ als Linearkombination von $p_1(x)$, $p_2(x)$ und $p_3(x)$.
Lösung:

$$-286p_1(x) + 291p_2(x) - 102p_3(x) = 5x^2 - 10x - 97 = q(x).$$