Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit

Sommersemester 2024

Lineare Algebra für Informatiker

9. Übung - Lösungen

Präsenzaufgabe 9.1 Sei K ein Körper und sei

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K).$$

Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn die Spaltenvektoren $A_j = (a_{1,j}, a_{2,j}, \ldots, a_{n,j})$ für $1 \le j \le n$ linear unabhängig sind.

Lösung: Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die Standardbasis von K^n. Für alle $1 \le j \le n$ gilt $A_j = Ae_j$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent

1. Die Spaltenvektoren von A sind linear abhängig.
2. Es gibt $c_1, \ldots, c_n \in K$ mit $c_i \neq 0$ für mindestens ein i, sodass $\sum_{j=1}^{n} c_j A_j = O$.
3. Es gibt $c_1, \ldots, c_n \in K$ mit $c_i \neq 0$ für mindestens ein i, sodass $A\big(\sum_{j=1}^{n} c_j e_j\big) = O$.
4. Es gibt ein $v \in K^n \setminus \{O\}$, sodass $Av = O$.
5. $\ker(L_A) \neq \{O\}$.
6. L_A ist nicht injektiv.
7. L_A ist nicht bijektiv.
8. A ist nicht invertierbar.

Es folgt, dass die Spaltenvektoren von A genau dann linear unabhängig sind, wenn A invertierbar ist.