Universität Paderborn Sommersemester 2024
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit

Lineare Algebra für Informatiker

10. Übung

Präsenzaufgabe 10.1 Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \mapsto (x_2, 2x_1, -3x_1 + x_2)$.

(i) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$ von f bezüglich der Basen

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{C} = \left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(ii) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(f)$ von f bezüglich der Basen

$$\mathcal{B}' = \left\{ v'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v'_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{C}' = \left\{ w'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, w'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, w'_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

mithilfe der Formel für den Basiswechsel.

Präsenzaufgabe 10.2
Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3,3}(\mathbb{R})$$

und seien

$$\mathcal{E} = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Sei $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$. Berechnen Sie

(i) $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id})$ und $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id})$

(ii) $D = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L_A)$

(iii) D^n für beliebiges $n \in \mathbb{Z}$

(iv) A^n für beliebiges $n \in \mathbb{Z}$