Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit

Sommersemester 2024

Lineare Algebra für Informatiker

10. Übung - Lösungen

Präsenzaufgabe 10.1 Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \mapsto (x_2, 2x_1, -3x_1 + x_2)$.

(i) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$ von f bezüglich der Basen

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{C} = \left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (3, 4, -3) = 31w_1 - 14w_2 - 10w_3, \\ f(v_2) &= (1, -2, 4) = -13w_1 + 7w_2 + 5w_3 \end{aligned}$$

und darum

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 31 & -13 \\ -14 & 7 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}.$$

(ii) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(f)$ von f bezüglich der Basen

$$\mathcal{B}' = \left\{ v_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_1' = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{C}' = \left\{ w_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, w_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3' = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

mithilfe der Formel für den Basiswechsel.
Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned} v_1' &= -\frac{1}{5}v_1 - \frac{7}{5}v_2, \\ v_2' &= \frac{4}{5}v_1 - \frac{7}{5}v_2, \\ w_1 &= \frac{1}{3}w_1' + \frac{1}{3}w_2' + \frac{1}{3}w_3', \\ w_2 &= \frac{4}{9}w_1' + \frac{4}{9}w_2' + \frac{7}{9}w_3', \\ w_3 &= \frac{5}{9}w_1' + \frac{2}{9}w_2' - \frac{1}{9}w_3'. \end{aligned}$$

und darum

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -7 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}(\mathrm{Id}) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(f) &= M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}(\mathrm{Id}) M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) \\
&= \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 31 & -13 \\ -14 & 7 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -7 & -7 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -17 & -30 \\ -2 & 15 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Präsenzaufgabe 10.2
Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3,3}(\mathbb{R})$$

und seien

$$\mathcal{E} = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Sei $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$. Berechnen Sie

(i) $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id})$ und $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id})$
Lösung:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) $D = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L_A)$
Lösung:

$$D = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L_A) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}) A M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(iii) D^n für beliebiges $n \in \mathbb{Z}$
Lösung:

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(iv) A^n für beliebiges $n \in \mathbb{Z}$
Lösung:

$$\begin{aligned}
A^n &= \left(M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) D M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id})^{-1} \right)^n = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) D^n M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id})^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & 3 \cdot 2^n - 3 & 1 - 2^n \\ 3 - 3 \cdot 2^n & 2^{n+2} - 3 & 1 - 2^n \\ 3 - 3 \cdot 2^n & 3 \cdot 2^n - 3 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$