Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit

Sommersemester 2024

Lineare Algebra für Informatiker

13. Übung - Lösungen

Präsenzaufgabe 13.1 Bestimmen Sie eine Jordan Basis und die Jordan Normalform der Abbildung $L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $v \mapsto Av$, falls

(a) $n = 3$ und $A = \begin{pmatrix} -1 & -18 & -4 \\ 0 & 7 & 0 \\ 4 & 10 & 7 \end{pmatrix}$.

Lösung (ohne Rechnung): $\mathcal{B} := \{v_1 = (-5, 2, 1), (-4, 0, 4), (1, 0, 0)\}$ ist ein Jordanbasis. Die Jordan Normalform von L_A ist

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L_A) = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) $n = 5$ und $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Lösung (ohne Rechnung):

$$\mathcal{B} := \{v_1 = (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 6, 3, 0), (3, 0, 3, 3, 0), (1, 1, 1, 2, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$$

ist ein Jordanbasis. Die Jordan Normalform von L_A ist

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L_A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Präsenzaufgabe 13.2 Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$. Eine lineare Abbildung $N : V \to V$ heist nilpotent, falls es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $N^k = N \circ N \circ \cdots \circ N = 0$ die Nullabbildung ist. Beweisen Sie, dass es zu jeder linearen Abbildung $F : V \to V$ lineare Abbildungen $D : V \to V$ und $N : V \to V$ gibt, sodass

- D diagonalisierbar ist
- N nilpotent ist
- $F = D + N$
- D und N kommutieren, d.h. $D \circ N = N \circ D$.

Lösung: Sei $\mathcal{B}$ eine Jordanbasis bezüglich F. Dann hat $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ die Form

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} J_1 & & & & \\ & J_2 & & & \\ & & J_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_n \end{pmatrix}$$

wobei jedes

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

ein Jordanblock zu einem Eigenwert λ_i ist. Seien

$$D_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix N_i ist nilpotent und kommutiert mit der Diagonalmatrix D_i. Weiter gilt $J_i = D_i + N_i$. Seien $D : V \to V$ und $N : V \to V$ die lineare Abbildungen gegeben durch

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} D_1 & & & & \\ & D_2 & & & \\ & & D_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & D_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(N) = \begin{pmatrix} N_1 & & & & \\ & N_2 & & & \\ & & N_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & N_n \end{pmatrix}$$

Dann gilt $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(D) + M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(N) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(D+N)$ und damit $F = D + N$. Weil $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(D)$ diagonal ist, ist D diagonalisierbar. Da jedes N_i nilpotent ist, ist die Matrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(N)$ nilpotent und damit ist N nilpotent. Weil D_i und N_i für jedes i kommutieren, kommutieren $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(D)$ und $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(N)$. Es folgt, dass D und N kommutieren.