

# Lineare Algebra für Informatiker

## 1. Hausaufgabenblatt - Lösungen

**Hausaufgabe 1.1** Seien  $(S, \oplus, \star)$  ein Ring und  $X$  eine nichtleere Menge. Sei  $R = \{f : X \rightarrow S\}$  die Menge aller Abbildungen von  $X$  nach  $S$ . Wir definieren auf  $R$  eine Addition und Multiplikation durch

$$(f + g)(x) := f(x) \oplus g(x), \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \star g(x) \quad (f, g \in R, x \in X).$$

Zeigen Sie, dass  $(R, +, \cdot)$  ein Ring ist.

*Lösung:* Seien  $f, g, h \in R$ . Weil  $\oplus$  und  $\star$  assoziativ sind,  $\oplus$  kommutativ ist und das Distributivgesetz in  $S$  erfüllt ist, gilt für jedes  $x \in X$

$$\begin{aligned} (f + (g + h))(x) &= f(x) \oplus (g + h)(x) = f(x) \oplus (g(x) \oplus h(x)) \\ &= (f(x) \oplus g(x)) \oplus h(x) = (f + g)(x) \oplus h(x) = ((f + g) + h)(x) \\ (f \cdot (g \cdot h))(x) &= f(x) \star (g \cdot h)(x) = f(x) \star (g(x) \star h(x)) \\ &= (f(x) \star g(x)) \star h(x) = (f \cdot g)(x) \star h(x) = ((f \cdot g) \cdot h)(x) \\ (f + g)(x) &= f(x) \oplus g(x) = g(x) \oplus f(x) = (g + f)(x) \\ ((f + g) \cdot h)(x) &= (f + g)(x) \star h(x) = (f(x) \oplus g(x)) \star h(x) \\ &= (f(x) \star h(x)) \oplus (g(x) \star h(x)) = (f \cdot h)(x) \oplus (g \cdot h)(x) = (f \cdot h) + (g \cdot h)(x). \end{aligned}$$

Es folgt, dass  $+$  und  $\cdot$  assoziativ sind,  $+$  kommutativ ist und das Distributivgesetz in  $R$  erfüllt ist. Seien  $0, 1 \in S$  die neutrale Elementen für  $\oplus$  bzw.  $\star$ . Die Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathbf{0} : X &\rightarrow S, & x &\mapsto 0 \\ \mathbf{1} : X &\rightarrow S, & x &\mapsto 1 \end{aligned}$$

sind neutrale Elementen für  $+$  bzw.  $\cdot$ . Weil  $0 \neq 1$ , gilt  $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$ . Wenn  $f \in R$ , dann ist die Abbildung

$$-f : X \rightarrow S, \quad x \mapsto -f(x)$$

eine additive Inverse für  $f$ .

**Hausaufgabe 1.2** Sei  $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ . Zeigen Sie, dass  $G$  unter Multiplikation komplexer Zahlen eine abelsche Gruppe bildet.

*Lösung:* Seien  $z_1, z_2 \in G$ . Es gibt  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ , sodass  $z_1^{n_1} = 1$  und  $z_2^{n_2} = 1$ . Es folgt, dass

$$(z_1 z_2)^{n_1 n_2} = z_1^{n_1 n_2} z_2^{n_1 n_2} = (z_1^{n_1})^{n_2} (z_2^{n_2})^{n_1} = 1^{n_2} 1^{n_1} = 1.$$

Darum gilt  $z_1 z_2 \in G$ . Die Multiplikation auf  $G$  ist assoziativ und kommutativ, da die Multiplikation auf  $\mathbb{C}$  assoziativ und kommutativ ist. Das neutrale Element  $1$  ist enthalten in  $G$ , da  $1^1 = 1$ . Wenn  $z \in G$  und  $n \in \mathbb{N}$  erfüllt die Gleichung  $z^n = 1$ , dann gilt

$$\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1} = 1.$$

Darum gilt  $\frac{1}{z} \in G$ .

**Hausaufgabe 1.3** Betrachten Sie die Teilmenge  $G = \{[1], [3], [7], [9]\}$  des Rings  $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ . Zeigen Sie, dass  $G$  unter Multiplikation in  $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$  eine Gruppe bildet.

*Lösung:* Die Multiplikation auf  $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$  ist assoziativ und kommutativ. Das neutrale Element  $[1]$  ist enthalten in  $G$ . Weil  $[3][7] = [21] = [1]$  und  $[9][9] = [81] = [1]$ , gilt  $x^{-1} \in G$  für alle  $x \in G$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $xy \in G$  für alle  $x, y \in G$  gilt. Dies ergibt sich aus den Berechnungen

$$[3][3] = [9], \quad [3][9] = [27] = [7], \quad [7][7] = [49] = [9], \quad [7][9] = [63] = [3].$$

**Hausaufgabe 1.4** Schreiben Sie das Element  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$  in  $S_6$  als

Komposition von Transpositionen.

*Lösung:* Es gilt

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$