Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit

Sommersemester 2024

Lineare Algebra für Informatiker

2. Hausaufgabenblatt

Hausaufgabe 2.1 Seien $(R, +, \cdot)$ und $(S, \oplus, \star)$ Ringe mit neutralen Elementen

- $0_R \in R$ für die Addition $+$ in R,
- $0_S \in S$ für die Addition $\oplus$ in S,
- $1_R \in R$ für die Multiplikation $\cdot$ in R,
- $1_S \in S$ für die Multiplikation $\star$ in S.

Sei $R \times S$ die Menge aller Paare (x, y) mit $x \in R$ und $y \in S$.

(a) Zeigen Sie, dass eine Ringstruktur auf $R \times S$ existiert, sodass die Abbildungen

$$\begin{aligned} R \times S \to R; &\quad (x, y) \mapsto x \\ R \times S \to S; &\quad (x, y) \mapsto y \end{aligned}$$

Ringhomomorphismen sind. Beweisen, dass die von Ihnen definierte Ringstruktur $R \times S$ auch tatsächlich zu einem Ring macht.

(b) Gibt es Ringe R und S, sodass $R \times S$ ein Körper ist?

Hausaufgabe 2.2 Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Bestimmen sie ob m teilbar ist durch n, wobei

(a) $m = 47^{56}$, $n = 53$.

(b) $m = 2^{131} + 3^{238} + 5^{42}$, $n = 79$.

Hausaufgabe 2.3 Bestimmen Sie $q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$, sodass

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) \quad \text{und} \quad \deg(r(x)) < \deg(g(x)),$$

wobei $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ gegeben werden durch

(a) $f(x) = 6x^7 - x^4 - 3x^2 + 1$ und $g(x) = 2x^2 - 3$,

(b) $f(x) = 5x^8 + x^3$ und $g(x) = x + 2$.

Abgabe der Hausaufgaben bis zum Sonntag den 05.05.2024, 23.59 Uhr in Panda.