Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit

Sommersemester 2024

Lineare Algebra für Informatiker

2. Hausaufgabenblatt - Lösungen

Hausaufgabe 2.1 Seien $(R,+,\cdot)$ und $(S,\oplus,\star)$ Ringe mit neutralen Elementen

- $0_R \in R$ für die Addition $+$ in R,
- $0_S \in S$ für die Addition $\oplus$ in S,
- $1_R \in R$ für die Multiplikation $\cdot$ in R,
- $1_S \in S$ für die Multiplikation $\star$ in S.

Sei $R \times S$ die Menge aller Paare (x,y) mit $x \in R$ und $y \in S$.

(a) Zeigen Sie, dass eine Ringstruktur auf $R \times S$ existiert, sodass die Abbildungen

$$\begin{aligned} R \times S \to R; \quad (x,y) \mapsto x \\ R \times S \to S; \quad (x,y) \mapsto y \end{aligned}$$

Ringhomomorphismen sind. Beweisen, dass die von Ihnen definierte Ringstruktur $R \times S$ auch tatsächlich zu einem Ring macht.
Lösung: Für $x_1, x_2 \in R$ und $y_1, y_2 \in S$ definieren wir

$$(x_1,y_1)\boxplus(x_2,y_2) := (x_1+x_2, y_1\oplus y_2) \quad \text{und} \quad (x_1,y_1)\boxtimes(x_2,y_2) := (x_1\cdot x_2, y_1\star y_2).$$

Seien $x_1, x_2, x_3 \in R$ und $y_1, y_2, y_3 \in S$. Wegen Assoziativität von $+, \cdot, \oplus$ und $\otimes$ gilt

$$\begin{aligned}
\Big((x_1,y_1) \boxplus (x_2,y_2)\Big) \boxplus (x_3,y_3) &= (x_1+x_2, y_1 \oplus y_2) \boxplus (x_3,y_3) \\
&= \Big((x_1+x_2)+x_3, (y_1 \oplus y_2) \oplus y_3\Big) = \Big(x_1 + (x_2+x_3), y_1 \oplus (y_2 \oplus y_3)\Big) \\
&= (x_1,y_1) \boxplus (x_2+x_3, y_2 \oplus y_3) = (x_1,y_1) \boxplus \Big((x_2,y_2) \boxplus (x_3), y_3)\Big) \\
\Big((x_1,y_1) \boxtimes (x_2,y_2)\Big) \boxtimes (x_3,y_3) &= (x_1 \cdot x_2, y_1 \otimes y_2) \boxtimes (x_3,y_3) \\
&= \Big((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3, (y_1 \otimes y_2) \otimes y_3\Big) = \Big(x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3), y_1 \otimes (y_2 \otimes y_3)\Big) \\
&= (x_1,y_1) \boxtimes (x_2 \cdot x_3, y_2 \otimes y_3) = (x_1,y_1) \boxtimes \Big((x_2,y_2) \boxtimes (x_3), y_3)\Big).
\end{aligned}$$

Es folgt, dass $\boxplus$ und $\boxtimes$ assoziativ sind. Weil $+$ und $\oplus$ kommutativ sind, gilt weiter

$$(x_1,y_1) \boxplus (x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1 \oplus y_2) = (x_2+x_1, y_2 \oplus y_1) = (x_2,y_2) \boxplus (x_1,y_1).$$

Es folgt, dass $\boxplus$ kommutativ ist. Aufgrund der Distributivgesetze von R und S gilt weiterhin

$$\begin{aligned}
\Big((x_1,y_1) \boxplus (x_2,y_2)\Big) \boxtimes (x_3,y_3) &= (x_1+x_2, y_1 \oplus y_2) \boxtimes (x_3,y_3) \\
&= \Big((x_1+x_2) \cdot x_3, (y_1 \oplus y_2) \otimes y_3\Big) = \Big(x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3, y_1 \cdot y_3 \oplus y_2 \otimes y_3\Big) \\
&= \Big(x_1 \cdot x_3, y_1 \cdot y_3\Big) \boxplus \Big(x_2 \cdot x_3, y_2 \otimes y_3\Big) = \Big((x_1,y_1) \boxtimes (x_3,y_3)\Big) \boxplus \Big((x_2,y_2) \boxtimes (x_3,y_3)\Big).
\end{aligned}$$

Es folgt, dass $\boxplus$ und $\boxtimes$ das Distributivgestetz erfüllen. Die Elemente $(0_R, 0_S)$ und $(1_R, 1_S)$ sind neutrale Elemente für $\boxplus$, bzw. $\boxtimes$. Weil $0_R \neq 1_R$ und $0_S \neq 1_S$ gilt $(0_R, 0_S) \neq (1_R, 1_S)$. Schließlich, wenn $(x, y) \in R \times S$, dann ist $(-x, -y)$ ein inverses Element für (x, y) bezüglich $\boxplus$. Dies zeigt, dass $(R \times S, \boxplus, \boxtimes)$ ein Ring ist.

Wir definieren die Abbildungen

$$\pi_R : R \times S \to R; \quad (x, y) \mapsto x$$
$$\pi_S : R \times S \to S; \quad (x, y) \mapsto y.$$

Für alle $x_1, x_2 \in R$ und $y_1, y_2 \in S$ gilt

$$\begin{aligned}
\pi_R\big((x_1, y_1) \boxplus (x_2, y_2)\big) &= \pi_R\big(x_1 + x_2, y_1 \oplus y_2\big)\big) = x_1 + x_2 \\
\pi_S\big((x_1, y_1) \boxplus (x_2, y_2)\big) &= \pi_S\big(x_1 + x_2, y_1 \oplus y_2\big)\big) = y_1 + y_2 \\
\pi_R\big((x_1, y_1) \boxtimes (x_2, y_2)\big) &= \pi_R\big(x_1 \cdot x_2, y_1 \otimes y_2\big)\big) = x_1 \cdot x_2 \\
\pi_S\big((x_1, y_1) \boxtimes (x_2, y_2)\big) &= \pi_S\big(x_1 \cdot x_2, y_1 \otimes y_2\big)\big) = y_1 \otimes y_2.
\end{aligned}$$

Weil $\pi_R(1_R, 1_S) = 1_R$ and $\pi_S(1_R, 1_S) = 1_S$, folgt, dass π_R und π_S Ringhomomorphismen sind.

(b) Gibt es Ringe R und S, sodass $R \times S$ ein Körper ist?
Lösung: Nein. Für alle Ringe R, S gilt $(0_R, 1_S) \boxtimes (1_R, 0_S) = (0_R, 0_S)$. Die Elemente $(0_R, 1_S)$ und $(1_R, 0_S)$ sind daher Nullteiler. Körper besitzen keine Nullteiler ungleich Null.

Hausaufgabe 2.2 Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Bestimmen sie ob m teilbar ist durch n, wobei

(a) $m = 47^{56}$, $n = 53$.
Lösung: Da 53 eine Primzahl ist, gilt nach dem kleinen Satz von Fermat $[x]^{52} = [1]$für jedes $[x] \in \mathbb{Z}/53\mathbb{Z} \setminus \{[0]\}$. Darum gilt

$$[47]^{56} = [1][47]^4 = [47]^4 = [-6]^4 = [6]^3[6] = [216][6] = [4][6] = [24].$$

Es folgt, dass 47^{56} nicht durch 53 teilbar ist.

(b) $m = 2^{131} + 3^{238} + 5^{42}$, $n = 79$.
Lösung: Da 79 prim ist, gilt $[x]^{78} = [1]$ für alle $[x] \in \mathbb{Z}/79\mathbb{Z} \setminus \{[0]\}$. Es folgt, dass

$$[m] = [2]^{131} + [3]^{238} + [5]^{42} = [2]^{53} + [3]^4 + [5]^{42}.$$

Weiter gilt

$$[2]^{10} = [2]^6[2]^4 = [64][16] = [-15][16] = [-240] = [-3]$$

und darum

$$[2]^{53} = ([2]^{10})^4[2]^{10}[2]^3 = [-3]^4[-3][2]^3 = [81][-3][8] = [2][-24] = [-48] = [31].$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
&[5]^3 = [125] = [46], \quad [5]^4 = [230] = [-7], \quad [5]^8 = [-7]^2 = [49] = [-30] \\
&[5]^{16} = [-30]^2 = [900] = [31], \quad [5]^{32} = [31]^2 = [961] = [13] \\
&[5]^{40} = [5]^{32}[5]^8 = [-30][13] = [-390] = [-74] = [5].
\end{aligned}$$

Es folgt, dass $[5]^{42} = [5]^{40}[5]^2 = [5]^3 = [46]$. Wir schließen daraus, dass

$$[m] = [2]^{53} + [3]^4 + [5]^{42} = [31] + [81] + [46] = [31] + [2] + [-33] = [0]$$

und damit, dass m teilbar durch 79 ist.

Hausaufgabe 2.3 Bestimmen Sie $q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$, sodass

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) \quad \text{und} \quad \deg(r(x)) < \deg(g(x)),$$

wobei $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ gegeben werden durch

(a) $f(x) = 6x^7 - x^4 - 3x^2 + 1$ und $g(x) = 2x^2 - 3$,
Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}
f(x) &= 6x^7 - x^4 - 3x^2 + 1 \\
&= 3x^5(2x^2-3) + 9x^5 - x^4 - 3x^2 + 1 \\
&= 3x^5(2x^2-3) + \frac{9}{2}x^3(2x^2-3) - x^4 + \frac{27}{2}x^3 - 3x^2 + 1 \\
&= 3x^5(2x^2-3) + \frac{9}{2}x^3(2x^2-3) - \frac{1}{2}x^2(2x^2-3) + \frac{27}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 1 \\
&= 3x^5(2x^2-3) + \frac{9}{2}x^3(2x^2-3) - \frac{1}{2}x^2(2x^2-3) + \frac{27}{4}x(2x^2-3) - \frac{9}{2}x^2 + \frac{81}{4}x + 1 \\
&= 3x^5(2x^2-3) + \frac{9}{2}x^3(2x^2-3) - \frac{1}{2}x^2(2x^2-3) + \frac{27}{4}x(2x^2-3) - \frac{9}{4}(2x^2-3) + \frac{81}{4}x - \frac{5}{4} \\
&= \Big(3x^5 + \frac{9}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{27}{4}x - \frac{9}{4}\Big)(2x^2-3) + \frac{81}{4}x - \frac{23}{4}.
\end{aligned}$$

Darum gilt $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, mit $q(x) = 3x^5 + \frac{9}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{27}{4}x - \frac{9}{4}$ und $r(x) = \frac{81}{4}x - \frac{23}{4}$. Es gilt $\deg(r(x)) = 1 < 2 = \deg(g(x))$.

(b) $f(x) = 5x^8 + x^3$ und $g(x) = x + 2$.
Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}
f(x) &= 5x^8 + x^3 \\
&= 5x^7(x+2) - 10x^7 + x^3 \\
&= 5x^7(x+2) - 10x^6(x+2) + 20x^6 + x^3 \\
&= 5x^7(x+2) - 10x^6(x+2) + 20x^5(x+2) - 40x^5 + x^3 \\
&= 5x^7(x+2) - 10x^6(x+2) + 20x^5(x+2) - 40x^4(x+2) + 80x^4 + x^3 \\
&= 5x^7(x+2) - 10x^6(x+2) + 20x^5(x+2) - 40x^4(x+2) + 80x^3(x+2) - 159x^3 \\
&= 5x^7(x+2) - 10x^6(x+2) + 20x^5(x+2) - 40x^4(x+2) + 80x^3(x+2) - 159x^2(x+2) \\
&\quad + 318x^2 \\
&= 5x^7(x+2) - 10x^6(x+2) + 20x^5(x+2) - 40x^4(x+2) + 80x^3(x+2) - 159x^2(x+2) \\
&\quad + 318x(x+2) - 636x \\
&= 5x^7(x+2) - 10x^6(x+2) + 20x^5(x+2) - 40x^4(x+2) + 80x^3(x+2) - 159x^2(x+2) \\
&\quad + 318x(x+2) - 636(x+2) + 1272 \\
&= \big(5x^7 - 10x^6 + 20x^5 - 40x^4 + 80x^3 - 159x^2 + 318x - 636\big)(x+2) + 1272.
\end{aligned}$$

Darum gilt $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, mit

$$q(x) = 5x^7 - 10x^6 + 20x^5 - 40x^4 + 80x^3 - 159x^2 + 318x - 636 \quad \text{und} \quad r(x) = 1272.$$

Es gilt $\deg(r(x)) = 0 < 1 = \deg(g(x))$.